Systèmes Linéaires et Invariants dans le Temps

Electronique

V. Choqueuse

Département Electronique, ENIB

Gitlab: `https://git.enib.fr/choqueuse/s4p_electronique_choqueuse`

Table des matières

SLIT - Définition

Définition

Un système linéaire est un dispositif qui établit une relation de cause à effet entre sa sortie $s(t)$ et son entrée $e(t)$.

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow s(t)$$

Figure 1: Système une entrée / une sortie

Propriétés

- Linéarité : Lorsque l'entrée est égale à $e(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$, la sortie du système est égale à $s(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$.
- Invariance dans le Temps: Lorsque l'entrée est égale à $e(t-\tau)$, la sortie du système est égale à $s(t-\tau)$.

SLIT - Equation Différentielle

Equation Différentielle

La sortie $s(t)$ est liée à $e(t)$ par une équation différentielle linéaire à coefficients constants ($a_k \in \mathbb{R}$ et $b_k \in \mathbb{R}$).

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

- Ordre : L'ordre du système est égal à n.
- Causalité : la cause doit précéder l'effet.
  - Pour que le système soit causal, il faut et il suffit que $n \geq m$
- Stabilité : Le système est stable si à une entrée bornée $|e(t)| < \infty$, la sortie est également bornée $|s(t)| < \infty$.

L'équation caractéristique est définie par :

$$a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$$

Avant Propos

Soit $e(t)$ un signal temporel dont la transformée de Laplace est notée $E(p) = \mathscr{L}[e(t)]$.

- Linéarité : Si $s(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$, alors

$$S(p) = \alpha_1 E_1(p) + \alpha_2 E_2(p)$$

- Dérivation : Si $s(t) = \frac{d^k e(t)}{dt^k}$, alors

$$S(p) = p^k E(p)$$

En utilisant ces propriétés dans l'équation différentielles, nous obtenons

$$a_n p^n S(p) + \cdots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \cdots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

où $p \in \mathbb{C}$ est l'opérateur de Laplace. En factorisant les deux membres respectivement par $S(p)$ et $E(p)$, nous obtenons....

SLIT - Fonction de transfert

Définition

La fonction de transfert d'un système est défini par

$$H(p) \triangleq \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

- Zéros: les zéros correspondent aux valeurs de p annulant le numérateur de la FT.
- Pôles: les pôles correspondent aux valeurs de p annulant le dénominateur de la FT.
  - pôles = racines de l'équation caractéristique.

Il faut savoir passer très vite de l'équation différentielle à la fonction de transfert, et inversement.

SLIT - Pôles et Zéros

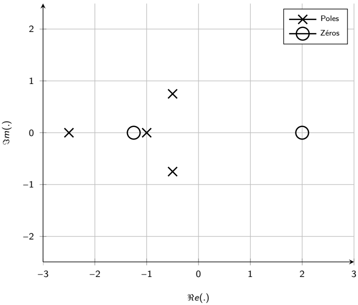
Représentation

Représentation des pôles et des zéros de la fonction de transfert $H(p)$ dans le plan complexe.

- Les pôles p_k sont représentés avec des croix.
- Les zéros z_k sont représentés avec des cercles.

Remarques

- Les pôles et zéros sont réels ou complexes conjugués !
- Causalité:
  - Nombre de Zéros ≤ Nombre de Pôles
- Stabilité:
  - $\Re e(p_k) < 0$.



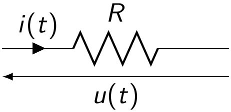
Exercice

Ordre	Fonction de transfert	Equa. diff.	Equa. caract.	Pôles
1	$-\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+R_2Cp}$	$R_2C\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=-\frac{R_2}{R_1}e(t)$	$R_2Cp+1=0$	$-\frac{1}{R_2C}$
		$s(t)+2.10^{-6}\frac{ds(t)}{dt}=3.10^{-6}\frac{de(t)}{dt}$		
	$\frac{1}{1+RCp+LCp^2}$			
	$\frac{(p+1)(p^2+4)}{(p+6)(p-1)(3p^2+5p+3}$			

Rappels - Dipôles de base

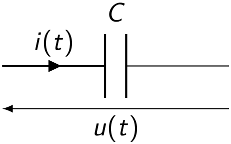
Dipôles de base ($Z(p) = U(p)/I(p)$)

- Résistance :



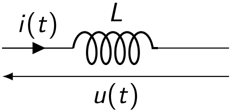
- Relation : $u(t) = Ri(t)$
- Impédance : $Z_R(p) = R$

- Condensateur :



- Relation : $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$
- Impédance : $Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$

- Bobine :

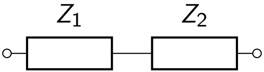


- Relation : $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
- Impédance : $Z_L(p) = Lp$

Rappels - Dipôles de base

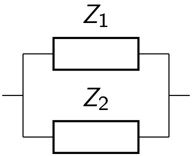
Associations de dipoles

- Mise en série :



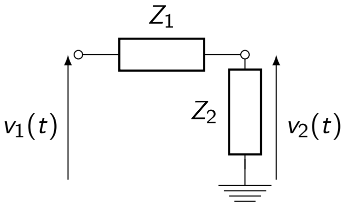
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

- Mise en parallèle :



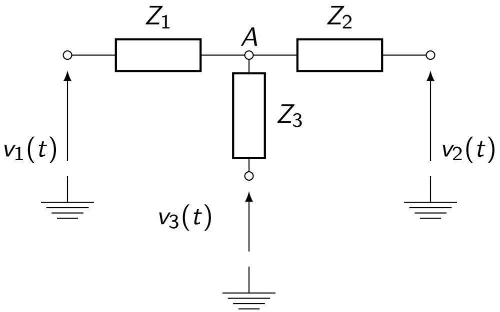
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

- Pont Diviseur :



$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

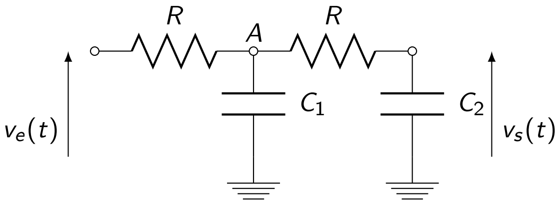
Potentiels de Nœuds



- Equation :

$$\frac{V_1(p) - V_A(p)}{Z_1} + \frac{V_2(p) - V_A(p)}{Z_2} + \frac{V_3(p) - V_A(p)}{Z_3} = 0$$

Exercice : TD1



- Trouvez la fonction de transfert $H(p) = V_s(p)/V_e(p)$.

Exercice : Filtres de second ordre

- Travail collaboratif sur des 2nd ordre passifs et actifs.

Cas général

La solution de l'équation différentielle s'exprime sous la forme :

$$s(t) = s_L(t) + s_P(t)$$

- Régime transitoire $s_L(t)$: solution libre de l'équation sans second membre :

$$s_L(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{p_k t}$$

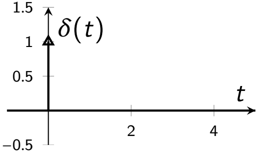
  - $p_k \in \mathbb{C}$: racines de l'équation caractéristique :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$$

  - λ_k: Constantes d'intégration.
- Régime permanent (forcé) $s_P(t)$: solution particulière de l'équation avec second membre :
  - Pas de cas général, dépend du type d'entrée.

Régime permanent

- Entrée = Impulsion :



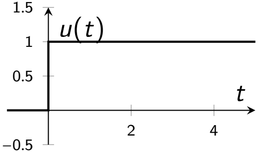
- Expression :

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$.

- Sortie : Réponse impulsionnelle.
- Régime permanent : $s_P(t) = 0$.

- Entrée = Echelon :



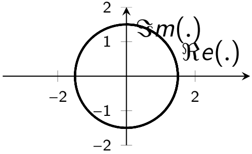
- Expression :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Sortie : Réponse indicielle.
- Régime permanent : $s_P(t) = \frac{b_0}{a_0}$

Régime permanent

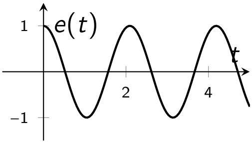
- Entrée = Exponentielle complexe :



- Expression : $e(t) = e^{j\omega t}$.
- Sortie : Réponse harmonique.
- Régime permanent :

$$s_P(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}.$$

- Entrée = Sinusoide :



- Expression : $e(t) = E\sin(\omega t + \varphi)$.
- Sortie : Réponse harmonique.
- Régime permanent :

$$s_P(t) = E|H(j\omega)|\sin(\omega t + \varphi + \arg[H(j\omega)]).$$

Réponse temporelle- Cas de la réponse harmonique

Réponse harmonique

La réponse harmonique s'obtient en posant $p = j\omega$ dans la fonction de transfert.

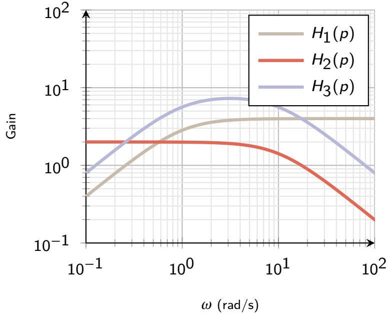
Diagramme de Bode

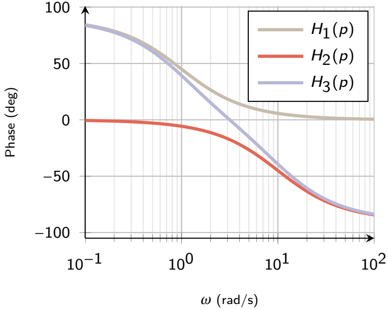
Représentation de la fonction complexe $H(j\omega)$ via 2 graphiques

- Abscisse: pulsation ω (rad/s) en échelle log
- Ordonnée:
  - Gain $|H(j\omega)|$ en échelle log.
  - Phase $\arg[H(j\omega)]$ (deg) en échelle linéaire

Exemples

$$H_1(p) = \frac{4p}{1+p}, \quad H_2(p) = \frac{2}{1+\frac{1}{10}p}, \quad H_3(p) = H_1(p) \times H_2(p)$$





Exercices- Premier ordre (Rappel S2)

Exercice

On considère un filtre RC régit par l'équation différentielle suivante :

$$RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t)$$

- Déterminez la fonction de transfert $H(p) = V_s(p)/V_e(p)$.
- Déterminez les pôles et les zéros de $H(p)$ et représentez-les.
- Déterminez la réponse harmonique et représentez le diagramme de Bode.
- Déterminez le régime libre.
- Déterminez la réponse indicielle lorsque le système est initialement au repos.