Traitement du Signal S5

Introduction aux signaux (& systèmes)

V. Choqueuse

Département Electronique, ENIB

Gitlab: `https://git.enib.fr/choqueuse/s5_signal/issues`

Table des matières

Introduction

Contexte

Un signal à une dimension peut être décrit par un modèle[1] $s(t)$.

En fonction de $s(t)$, le signal peut être classé dans différentes catégories:

- Signal Continu *ou* Signal Discret,
- Signal Déterministe *ou* Signal Aléatoire,
- Signal à support temporel borné *ou* Signal à support temporel non borné,
- Signal causal *ou* Signal non causal,
- Signal à énergie finie *ou* Signal à puissance moyenne finie.

[1] Le plus souvent t représentera le temps

Classification

Signal Continu / Discret

Le signal peut être classé en fonction de la nature de l'amplitude $s(t)$ et de la variable temporelle t.

$s(t)$ / t	Continue	Discrète
Continu Discret	Signal Analogique Signal Echantillonné	Signal Quantifié Signal Numérique

Exemple

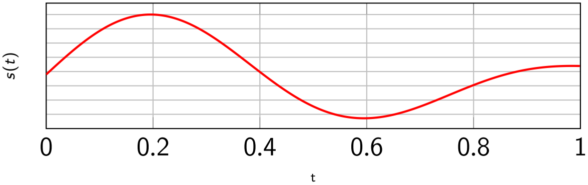


Figure 1: Signal Analogique

Signal Continu / Discret

Le signal peut être classé en fonction de la nature de l'amplitude $s(t)$ et de la variable temporelle t.

t \ $s(t)$	Continue	Discrète
Continu	Signal Analogique	Signal Quantifié
Discret	Signal Echantillonné	Signal Numérique

Exemple

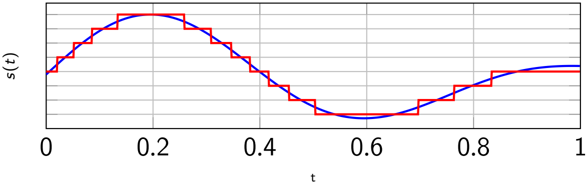


Figure 1: Signal Quantifié ($s(t) \in \mathbb{S}$ où $\mathbb{S}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$).

Classification

Signal Continu / Discret

Le signal peut être classé en fonction de la nature de l'amplitude $s(t)$ et de la variable temporelle t.

$s(t)$ \ t	Continue	Discrète
Continu	Signal Analogique	Signal Quantifié
Discret	Signal Echantillonné	Signal Numérique

Exemple

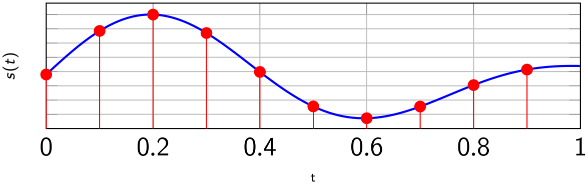


Figure 1: Signal Echantillonné ($t \in \mathbb{T}$ où $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$).

Classification

Signal Continu / Discret

Le signal peut être classé en fonction de la nature de l'amplitude $s(t)$ et de la variable temporelle t.

t \ $s(t)$	Continue	Discrète
Continu Discret	Signal Analogique Signal Echantillonné	Signal Quantifié Signal Numérique

Exemple

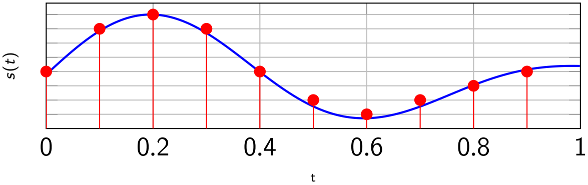


Figure 1: Signal Numérique ($s(t) \in \mathbb{S}$ et $t \in \mathbb{T}$)

Signal Continu / Discret

Le signal peut être classé en fonction de la nature de l'amplitude $s(t)$ et de la variable temporelle t.

t \ $s(t)$	Continue	Discrète
Continu	Signal Analogique	Signal Quantifié
Discret	Signal Echantillonné	Signal Numérique

Hypothèse

Dans ce cours, nous allons uniquement nous intéresser aux signaux analogiques.

Signal Déterministe / Aléatoire

Le signal peut être classé en fonction du modèle $s(t)$ utilisé.

- **signal déterministe**: signal pouvant être décrit par un modèle mathématique (fonction analytique),
- **signal aléatoire** (stochastique): signal pouvant être décrit par un modèle faisant intervenir des variables aléatoires.

Exemple

Soit le signal :

$$s(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où l'amplitude a, la pulsation ω_0 et la phase φ sont des quantités déterministes fixes.

- Le signal $s(t)$ est un signal déterministe.

Classification

Signal Déterministe / Aléatoire

Le signal peut être classé en fonction du modèle $s(t)$ utilisé.

- **signal déterministe**: signal pouvant être décrit par un modèle mathématique (fonction analytique),
- **signal aléatoire** (stochastique): signal pouvant être décrit par un modèle faisant intervenir des variables aléatoires.

Exemple

Soit le signal :

$$s(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) + b(t)$$

où l'amplitude a, la pulsation ω_0 et la phase φ sont des quantités déterministes fixes et $b(t)$ est une composante additive de bruit modélisée par une variable aléatoire (ex: loi Gaussienne).

- Le signal $s(t)$ est un signal aléatoire.

Classification

Signal Déterministe / Aléatoire

Le signal peut être classé en fonction du modèle $s(t)$ utilisé.

- **signal déterministe**: signal pouvant être décrit par un modèle mathématique (fonction analytique),
- **signal aléatoire** (stochastique): signal pouvant être décrit par un modèle faisant intervenir des variables aléatoires.

Hypothèse

Dans ce cours, nous allons uniquement nous intéresser aux signaux déterministes.

Support Temporel Borné / Non Borné

- **Signal à support temporel fini** : Un signal possède un support temporel fini *ssi*
$$s(t) = 0 \;\; \forall t \notin [t_1, t_2].$$
- **Signal causal** : Un signal est causal *ssi*
$$s(t) = 0 \;\; \forall t < 0.$$

Exemple

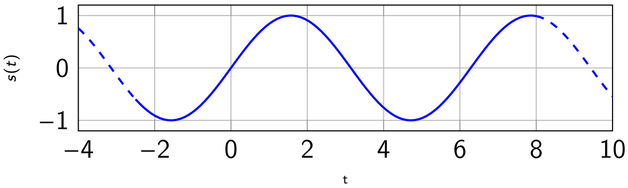


Figure 1: Signal à support temporel infini (et donc non causal).

Support Temporel Borné / Non Borné

- **Signal à support temporel fini** : Un signal possède un support temporel fini *ssi*
$$s(t) = 0 \ \forall t \notin [t_1, t_2].$$
- **Signal causal** : Un signal est causal *ssi*
$$s(t) = 0 \ \forall t < 0.$$

Exemple

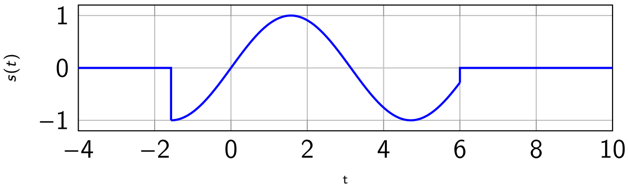


Figure 1: Signal à support temporel fini mais non causal.

Support Temporel Borné / Non Borné

- **Signal à support temporel fini** : Un signal possède un support temporel fini *ssi*
$$s(t) = 0 \ \forall t \notin [t_1, t_2].$$
- **Signal causal** : Un signal est causal *ssi*
$$s(t) = 0 \ \forall t < 0.$$

Exemple

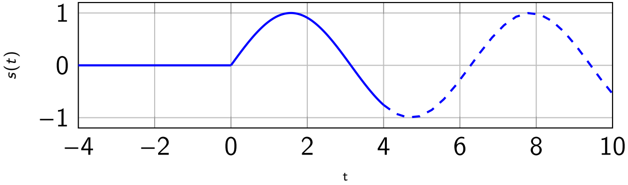


Figure 1: Signal causal mais à support temporel infini.

Classification

Support Temporel Borné / Non Borné

- **Signal à support temporel fini** : Un signal possède un support temporel fini *ssi*
$$s(t) = 0 \ \forall t \notin [t_1, t_2].$$
- **Signal causal** : Un signal est causal *ssi*
$$s(t) = 0 \ \forall t < 0.$$

Remarques

- Les signaux rencontrés en pratique sont causaux et à support temporel fini.
- Les signaux à support temporel infini ou non causaux sont des signaux théoriques. Ces signaux sont régulièrement utilisés pour illustrer certains phénomènes ou par commodité de calculs.
  - Ex: Les signaux T_0-périodiques sont des signaux à support temporel infini défini par:
$$s(t) = s(t + kT_0) \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Classification

Energie finie / Puissance Moyenne finie

- **Puissance** : La puissance (instantanée) est définie par :

$$P(t) = |s(t)|^2. \tag{1}$$

- **Energie Totale** : L'énergie totale est définie par :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt. \tag{2}$$

- **Puissance Moyenne Totale** : La puissance moyenne totale est définie par :

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt. \tag{3}$$

Remarques

- Pour les signaux causaux, l'intervalle d'intégration est remplacé par $[0, T]$ dans (3).
- Il est possible de définir l'énergie et la puissance moyenne sur un intervalle $I = [t_1, t_2]$ (voir polycopié).

Energie finie / Puissance Moyenne finie

- Un signal à **énergie (totale) finie** est un signal pour lequel:

$$E < \infty$$

- Un signal à **puissance moyenne (totale) finie non nulle** est un signal pour lequel:

$$0 < P < \infty$$

Propriétés

- Un signal à support temporel fini est nécessairement un signal à énergie finie et à puissance moyenne totale nulle.
- Un signal à puissance moyenne finie non nulle possède une énergie totale infinie ($E = +\infty$).
  - Cas des signaux périodiques.
- Si un signal à puissance moyenne finie possède une amplitude bornée par A (c-a-d $|s(t)| < A$ pour tout t) alors sa puissance moyenne totale est bornée par $P < A^2$.

A faire chez soi

- Soit un signal sinusoïdal défini par:

$$s(t) = a \times cos(\omega_0 t + \varphi).$$

  Déterminez l'énergie totale de $s(t)$, sa puissance moyenne sur un intervalle $I = [t_1, t_2]$, puis sa puissance moyenne totale.
- Soit $s(t)$ un signal T_0 périodique. Montrez que la puissance moyenne totale de $s(t)$ s'exprime sous la forme:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} |s(t)|^2 dt$$

  où $[T_0]$ désigne un intervalle d'intégration de longueur T_0.

A faire chez soi (solution)

- Pour calculer l'énergie, nous pouvons linéariser $\cos^2()$ c-a-d $|s(t)|^2 = a^2 \times cos^2(\omega_0 t+\varphi) = \frac{a^2}{2}(1+\cos(2(\omega_0 t+\varphi)))$. Pour les deux termes, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ ne converge pas. Le signal est donc à énergie infinie.
- La puissance moyenne sur $I = [t_1, t_2]$ s'exprime sous la forme:

$$\begin{aligned}
P_s(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}|s(t)|^2 dt &= \frac{a^2}{2(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}(1+\cos(2(\omega_0 t+\varphi))dt \\
&= \frac{a^2(t_2-t_1)}{2(t_2-t_1)} + \frac{a^2}{2(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\cos(2(\omega_0 t+\varphi))dt \\
&= \frac{a^2(t_2-t_1)}{2(t_2-t_1)} + \frac{a^2}{2(t_2-t_1)}\left[\frac{1}{2\omega_0}\sin(2(\omega_0 t+\varphi)\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4\omega_0(t_2-t_1)}(\sin(2(\omega_0 t_2+\varphi)-\sin(2(\omega_0 t_1+\varphi))
\end{aligned}$$

A faire chez soi (solution)

- La puissance moyenne totale peut se reexprimer sous la forme:

$$\begin{aligned} P_s &= \lim_{T\to\infty} P_s(T/2, -T/2) \\ &= \frac{a^2}{2} + \lim_{T\to\infty}\left(\frac{a^2}{4\omega_0 T}(\sin(2(\omega_0 T/2+\varphi) - \sin(2(-\omega_0 T/2+\varphi))\right) \\ &= \frac{a^2}{2} = V_{eff}^2 \end{aligned}$$

où $V_{eff} \triangleq \frac{a}{\sqrt{2}}$ désigne la valeur efficace de $s(t)$.

Signaux Usuels

Contexte

Dans cette section, nous présentons plusieurs modèles de signaux très utilisés en traitement du signal (et en asservissement).

Les signaux présentés sont:

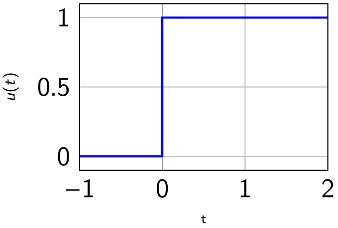
- Des signaux causaux: échelon unité, rampe unité,
- Des signaux à énergie finie: fenêtre rectangulaire, fenêtre triangulaire, impulsion de Dirac.
- Des signaux à puissance moyenne finie non nulle: signal sinusoidal, peigne de Dirac.

Echelon unité(échelon de Heaviside)

- Modèle de signal :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Représentation :



- L'échelon est utilisé couramment pour rendre causal un signal non causal, $s(t)$, via la multiplication $x(t) = s(t)u(t)$.
- La réponse d'un système à une entrée de type échelon est appelée réponse indicielle. La réponse indicielle est très utilisée en électronique et en asservissement.

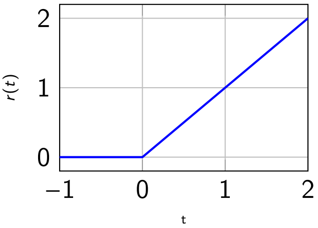
Signaux Usuels

Rampe unité

- Modèle de signal :

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Représentation :



- En asservissement, la réponse d'un système à une entrée de type rampe permet de quantifier l'écart de trainage.

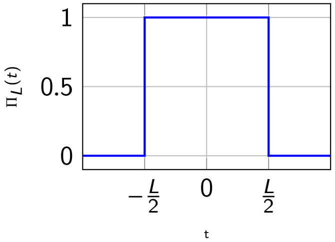
Signaux Usuels

Fenêtre rectangulaire (signal porte)

- Modèle de signal :

$$\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Représentation :



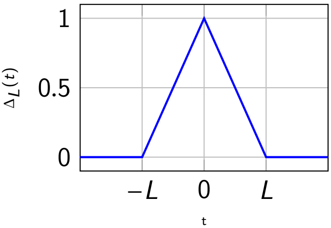
- Le fenêtre rectangulaire permet de convertir un signal à support temporel infinie, $s(t)$, en un signal à support temporel fini via la multiplication $x(t) = \Pi_L(t) \times s(t)$ (**troncature en temps**).

Fenêtre triangulaire

- Modèle de signal :

$$\Delta_L(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{L} & \text{si } -L \leq t < L \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Représentation :



- Le fenêtre triangulaire permet de convertir un signal à support temporel infinie en un signal à support temporel fini. Par rapport à la fenêtre rectangulaire, la fenêtre triangulaire permet de supprimer certains artefacts (voir cours 3).

Impulsion de Dirac (distribution de Dirac)

- Soit $h_L(t)$ une fenêtre de support temporel $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ et d'aire unitaire. L'impulsion de Dirac peut être construite à partir de la limite :

$$\delta(t) = \lim_{L \to 0} h_L(t).$$

- Exemple $(h_L(t) = \frac{1}{L}\Pi_L(t))$:

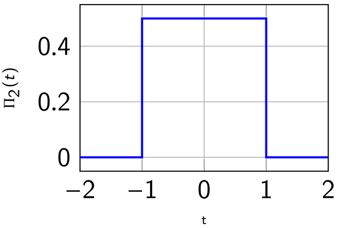


Figure 1: Cas où $L = 2$.

Impulsion de Dirac (distribution de Dirac)

- Soit $h_L(t)$ une fenêtre de support temporel $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ et d'aire unitaire. L'impulsion de Dirac peut être construite à partir de la limite :

$$\delta(t) = \lim_{L \to 0} h_L(t).$$

- Exemple $(h_L(t) = \frac{1}{L}\Pi_L(t))$:

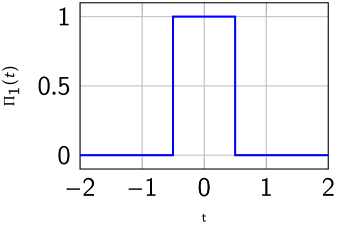


Figure 1: Cas où $L = 1$.

Impulsion de Dirac (distribution de Dirac)

- Soit $h_L(t)$ une fenêtre de support temporel $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ et d'aire unitaire. L'impulsion de Dirac peut être construite à partir de la limite :

$$\delta(t) = \lim_{L \to 0} h_L(t).$$

- Exemple $(h_L(t) = \frac{1}{L}\Pi_L(t))$:

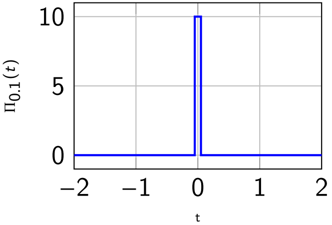


Figure 1: Cas où $L = 0.1$.

Impulsion de Dirac

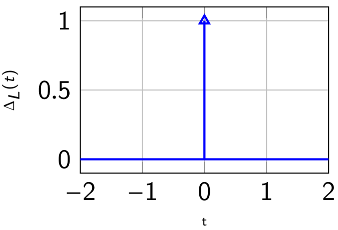
- Modèle de signal :

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

sous la contrainte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

- Représentation :



- L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est une distribution (ca n'est pas une fonction au sens classique).
- La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle. Pour les SLIT, nous verrons dans le cours 4 que la connaissance de la réponse impulsionnelle permet de déterminer la réponse du système à une entrée quelconque (WTF !!!)

Impulsion de Dirac: Propriétés

- **Lien avec l'échelon unité**:

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t).$$

- **Echantillonnage des signaux**:

$$s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0)dt = s(t_0).$$

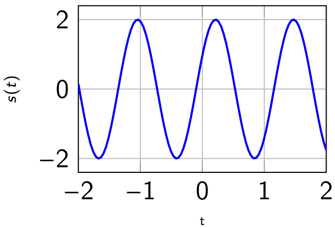
Sinusoïde

- Modèle de signal :

$$s(t) = a \times \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

  - $\omega_0 = 2\pi f_0$ désigne la pulsation (en rad/s) et f_0 désigne la fréquence (en Hz).
  - a désigne l'amplitude,
  - φ désigne la phase (en rad).

- Représentation :



- Le signal $s(t)$ est T_0-périodique avec $T_0 = 1/f_0$ (en s).
- Il est possible de décomposer $s(t)$ en une somme de deux exponentielles complexes.

Exponentielle Complexe (Rappels)

- Modèle de signal :

$$z(t) = ce^{j\omega_0 t}$$

  - où $c \in \mathbb{C}$ et $e^{j\theta} \triangleq \cos(\theta) + j\sin(\theta)$.
- Propriétés :
  - Complexe conjugué: $z^*(t) = c^* e^{-j\omega_0 t}$
  - Module: $|z(t)| = \sqrt{z(t)z^*(t)} = |c|$.
  - Argument: $\arg[z(t)] = \omega_0 t + \arg[c]$.
- Lien avec le sinus/cosinus:
  - Si $c \triangleq ae^{j\varphi}$ avec $a > 0$, alors $z(t) = a(\cos(\omega_0 t + \varphi) + j\sin(\omega_0 t + \varphi))$. Il en vient que :

$$a\cos(\omega_0 t + \varphi) = \Re e(z(t)) = \frac{z(t) + z^*(t)}{2} = \frac{c}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{c^*}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$a\sin(\omega_0 t + \varphi) = \Im m(z(t)) = \frac{z(t) - z^*(t)}{2j} = \frac{c}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{c^*}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

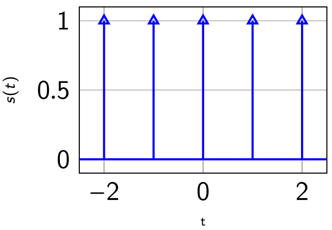
Peigne de Dirac

- Modèle de signal :

$$p_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

  - T_0 désigne la période (en s).

- Représentation :



- Ce peigne représente l'opérateur d'échantillonnage à la cadence T_0, car le produit $s(t) \times p_{T_0}(t)$ correspond au prélèvement régulier d'une suite d'échantillons espacés de T_0 secondes.