

Traitement du Signal S5

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

V. Choqueuse

Département Electronique, ENIB

Gitlab: https://git.enib.fr/choqueuse/s5_signal/issues



Introduction

Formalisme Réel

Condition d'existence

Calcul des coefficients

Exemples

Spectre d'amplitude et de phase (mono-lateral)

Formalisme Complexe

Décomposition en Série de Fourier

Calcul des coefficients C_n

Exemple

Propriétés


Spectre d'amplitude et de phase bilatéral

Synthèse des signaux périodiques

Problématique

Exemple

Contexte

- ▶ Les signaux que nous observons dans la nature présentent un comportement "localement" périodique et oscillatoire.
- ▶ Dans ses travaux sur la propagation de la chaleur, le physicien Joseph Fourier () proposa de décomposer les signaux T_0 -périodique en une somme de sinusoides de fréquences nf_0 ($f_0 = 1/T_0$ et $n \in \mathbb{Z}^+$) ¹.
- ▶ Mathématiquement, cette décomposition peut s'écrire sous la forme **générale** suivante ($s(t) \in \mathbb{C}$):

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2j\pi n f_0 t}$$

- ▶ Intérêts des fonctions exponentielles:
 - ▶ Espace de représentation parcimonieux → analyse des signaux simplifiée.
 - ▶ Fonctions propres des systèmes SLIT → analyse des effets simplifiée.
 - ▶ Fonctions orthogonales → coefficients c_n simples à calculer.

Problématiques

- ▶ Soit $s(t)$ un signal T_0 -périodique ($s(t) \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), sous quelles conditions la décomposition en série de Fourier existe,
- ▶ Si cette décomposition existe, comment déterminer l'expression des coefficients de la décomposition.
- ▶ Une fois déterminés, comment représenter graphiquement les coefficients de la décomposition en série de Fourier ?
- ▶ Quels sont les liens entre les propriétés du signal $s(t)$ et l'expression des coefficients de la décomposition.

Méthodologie

En fonction de la nature de $s(t)$, il est possible d'utiliser des formes alternatives de la décomposition en série de Fourier.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux décompositions suivantes:

- **Cas où $s(t) \in \mathbb{R}$:**

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n) \quad (\text{amplitude/phase})$$

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) \quad (\text{coef } a_n/b_n)$$

- **Cas où $s(t) \in \mathbb{C}$:**

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2j\pi n f_0 t} \quad (\text{complexe})$$

Méthodologie (travail personnel)

Pour $s(t) \in \mathbb{R}$, ces différentes décompositions sont liées.

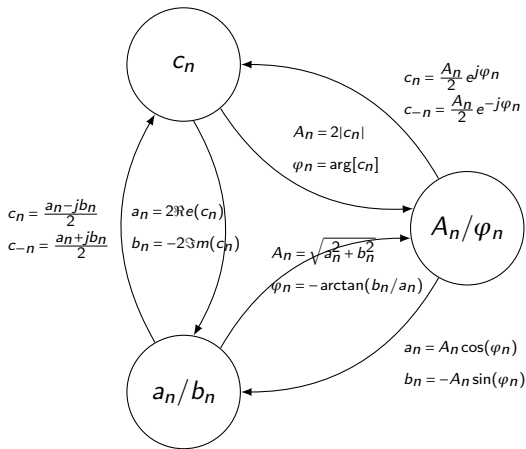


Figure 1: Relation entre les coefficients lorsque $n \geq 1$.

Formalisme Réel

Condition d'existence

Soit $s(t)$ un signal T_0 -périodique de forme quelconque. Pour que $s(t)$ admette une DSF, il suffit que $s(t)$ soit un signal de carré sommable sur une période (c-a-d à énergie finie **sur une période**):

$$\int_{[T_0]} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

Décomposition en Série de Fourier (DSF): amplitude/phase

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

- ▶ $f_0 = \frac{1}{T_0}$ est appelée fréquence fondamentale (Hz),
- ▶ A_0 correspond à la composante continu (valeur moyenne),
- ▶ $A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1)$ est appelé composante fondamentale,
- ▶ Pour $n > 1$, $A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$ est appelé harmonique de rang n .

Calcul de A_0

Soit $s(t)$ un signal T_0 -périodique, la composante continue est égale à :

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t) dt$$

Calcul des A_n et φ_n ($n \geq 1$)

Nous allons utiliser une démarche en deux temps:

1. Calcul des coefficients a_n et b_n (plus simples à déterminer).

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

avec $a_n = A_n \cos(\varphi_n)$ et $b_n = -A_n \sin(\varphi_n)$.

2. Détermination des coefficients A_n et φ_n :

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1a)$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (1b)$$

Calcul des a_n et b_n

En utilisant l'orthogonalité des fonctions cosinus et sinus sur une période, il est possible de démontrer que:

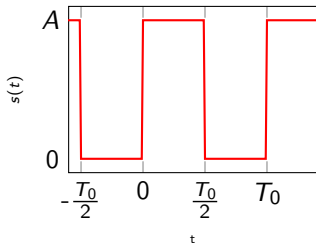
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad (2a)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (2b)$$

Remarques

- ▶ Il est fortement recommandé d'utiliser les propriétés de symétrie du signal en amont:
 - ▶ Si $s(t)$ est une fonction paire, alors $b_n = 0$.
 - ▶ Si $s(t)$ est une fonction impaire, alors $a_n = 0$.
- ▶ A vous de choisir l'intervalle d'intégration de durée T_0 qui vous arrange ! ($\int_0^{T_0}$, $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$, etc).

Exemples: Cas d'un signal carré



- Modèle de signal : Mathématiquement, le signal s'exprime sur **une période** sous la forme :

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

- Coefficient A_0 :

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A dt = \frac{A}{2}$$

- Coefficient a_n et b_n : Le signal est impair donc $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = \frac{2A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \frac{A}{n\pi} [-\cos(2\pi n f_0 t)]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \begin{cases} \frac{2A}{n\pi} & \text{si } n = 2q + 1 \text{ avec } q \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Coefficients A_n et φ_n :

$$A_n = \sqrt{b_n^2} = \begin{cases} \frac{2A}{n\pi} & \text{pour } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{pour } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

Exemples: Cas d'un signal carré

Le signal carré peut finalement se décomposer sous la forme :

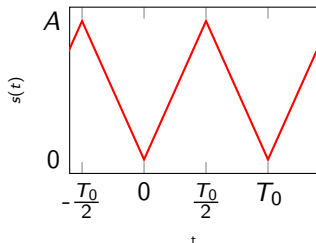
$$s(t) = \frac{A}{2} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2A}{(2q+1)\pi} \cos\left(2\pi(2q+1)f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- ▶ présence des harmoniques de rang impair uniquement.
- ▶ Décroissance des A_n en $1/n$.

Synthèse du signal (travail personnel)

- ▶ En utilisant Python, représentez le signal $s(t)$ lorsque la somme comporte $L = 1$, $L = 3$, $L = 10$ puis $L = 100$ harmoniques non nulles (vous prendrez $f_0 = 1$ Hz et $A = 2$).
- ▶ Que constatez-vous concernant la qualité de la reconstruction du signal $s(t)$?
- ▶ Qu'observez-vous aux points de discontinuité du signal $s(t)$ (en $kT_0/2$)?

Exemples: Cas d'un signal triangulaire (travail personnel)



- Modèle de signal : Mathématiquement, le signal s'exprime sur **une période** sous la forme :

$$s(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T_0} t & \text{si } 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ \frac{2A}{T_0} (T_0 - t) & \text{si } \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

- Coefficient A_0 :

$$A_0 = \frac{A}{2}$$

- Coefficient a_n et b_n : Le signal est paire donc $b_n = 0$.

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4A}{n^2\pi^2} < 0 & \text{si } n = 2q + 1 \text{ avec } q \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Coefficients A_n et φ_n :

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & \text{pour } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \begin{cases} -\pi & \text{pour } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

Spectre d'amplitude et de phase (mono-lateral)

- ▶ Le **spectre d'amplitude** correspond à la représentation graphique des coefficients A_n en fonction de la fréquence nf_0 .
- ▶ Le **spectre de phase** correspond à la représentation graphique des coefficients φ_n en fonction de la fréquence nf_0 .

Remarque

- ▶ La représentation spectrale contient des spectres **en raies** c-a-d que A_n et φ_n sont nulles si n n'est pas un entier (représentation parcimonieuse).

Spectre d'amplitude et de phase (mono-lateral)

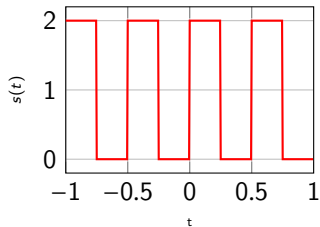


Figure 2: Représentation temporelle d'un Signal carré à 2 Hz ayant une composante continue égale à 1.

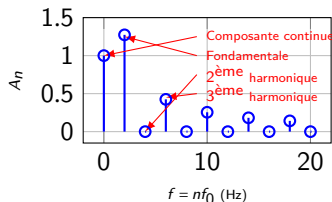


Figure 3: Spectre d'amplitude

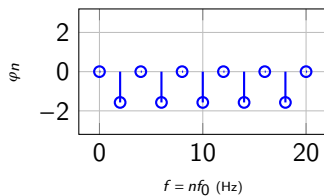


Figure 4: Spectre de phase

Spectre d'amplitude et de phase (mono-lateral)

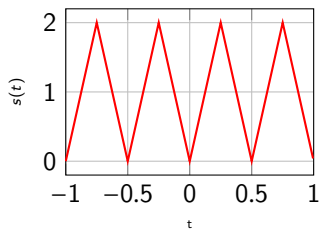


Figure 5: Représentation temporelle d'un signal triangulaire à 2 Hz ayant une composante continue égale à 1.

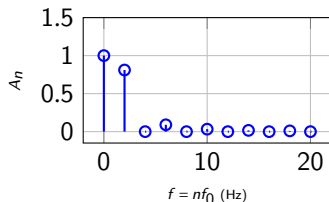


Figure 6: Spectre d'amplitude

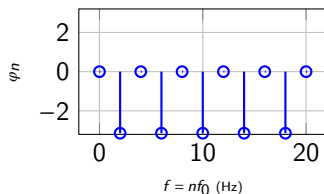


Figure 7: Spectre de phase

Formalisme Complexe

Pourquoi passer dans \mathbb{C}

- ▶ Aller plus loin dans la décomposition du signal.
 - ▶ Une sinusoïde peut être décomposée en 2 exponentielles complexes.
- ▶ Étendre la décomposition au cas des signaux complexes ($s(t) \in \mathbb{C}$).
- ▶ Faciliter l'analyse mathématique.
 - ▶ Dans \mathbb{C} , les expressions peuvent se révéler nettement plus simples à manipuler (intégration de l'exponentielle, etc).

Décomposition en Série de Fourier (DSF): complexe

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2j\pi n f_0 t}$$

- ▶ Les coefficients $C_n \in \mathbb{C}$ correspondent aux coefficients de Fourier.
- ▶ Cette décomposition fait intervenir des fréquences positives ($n \geq 1$) et des fréquences négatives ($n \leq -1$).
 - ▶ (Seules les fréquences positives ont une signification physique).

Calcul des coefficients C_n

En utilisant l'orthogonalité des fonctions exponentielles complexes sur une période², il est possible de démontrer que :

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) e^{-2j\pi n f_0 t} dt$$

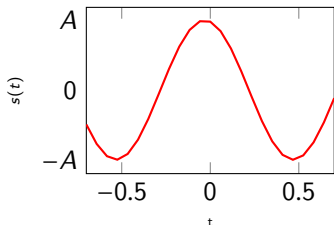
Remarques

- ▶ La composante continue est égale à: $C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) dt$.
- ▶ Par rapport à la décomposition amplitude/phase, l'obtention des coefficients de Fourier nécessite une seule intégration.
- ▶ Pour rappel $\frac{de^{j\alpha t}}{dt} = j\alpha e^{j\alpha t} \rightarrow$ primitives généralement simples à déterminer.

²Pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, la condition d'orthogonalité implique que:

$$\frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} e^{2j\pi(n-m)f_0 t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Exemple: Cas d'un signal sinusoidal



- Modèle de signal : Mathématiquement, le signal s'exprime sous la forme :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Coefficient C_0 :

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) dt = 0 \quad (\text{moyenne nulle})$$

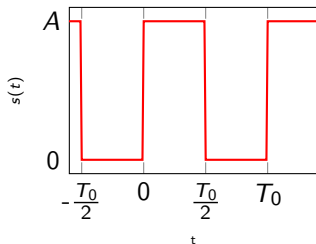
- Coefficients C_n : **Pas besoin de calculer l'intégrale**

$$\begin{aligned} s(t) &= A \Re \left(e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right) = \frac{A}{2} \left(e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right) \\ &= \left(\frac{A}{2} e^{j\varphi} \right) e^{2j\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2} e^{-j\varphi} \right) e^{-2j\pi f_0 t} \end{aligned}$$

Par identification, nous en déduisons donc que :

$$C_n = \begin{cases} \frac{A}{2} e^{j\varphi} & \text{pour } n = 1 \\ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} & \text{pour } n = -1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Exemple: Cas d'un signal carré



- ▶ Modèle de signal : Mathématiquement, le signal s'exprime sur **une période** sous la forme :

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

- ▶ Coefficient C_0 :

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A dt = \frac{A}{2}$$

- ▶ Coefficients C_n :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) e^{-2j\pi n f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-2j\pi n f_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T_0} \times \frac{1}{-2j\pi n f_0} \left[e^{-2j\pi n f_0 t} \right]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{A}{2j\pi n} (1 - e^{-j\pi n}) \\ &= \begin{cases} -j \frac{A}{\pi n} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous remarquons que $C_{-n} = \frac{A}{j\pi n} = C_n^*$
(**symétrie hermitienne** → voir section propriétés).

Propriété (Somme pondérée de signaux T_0 -périodiques)

Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ deux signaux T_0 périodiques dont les coefficients de la DSF sont respectivement notés $C_n^{(1)}$ et $C_n^{(2)}$.

Les coefficients de la DSF de $s(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$ s'expriment sous la forme :

$$C_n = \alpha_1 C_n^{(1)} + \alpha_2 C_n^{(2)}$$

Propriété (Somme pondérée de signaux T_0 -périodiques)

Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ deux signaux T_0 périodiques dont les coefficients de la DSF sont respectivement notés $C_n^{(1)}$ et $C_n^{(2)}$.

Les coefficients de la DSF de $s(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$ s'expriment sous la forme :

$$C_n = \alpha_1 C_n^{(1)} + \alpha_2 C_n^{(2)}$$

Propriété (Symétrie Hermitienne)

Lorsque $s(t) \in \mathbb{R}$, les coefficients de la décomposition en série de Fourier respecte la contrainte suivante:

$$C_n = C_{-n}^*$$

Dans ce contexte, $A_0 = C_0$, $A_n = 2|C_n|$ et $\varphi_n = \arg[C_n]$.

Propriété (Décalage temporel)

Soit $s(t)$ un signal T_0 périodique dont les coefficients de la DSF sont notés C_n . Les coefficients de la DSF de $x(t) = s(t - \tau)$ s'expriment sous la forme :

$$C_n^{(x)} = C_n e^{-2j\pi n f_0 \tau}$$

- ▶ Retarder ou avancer un signal dans le temps n'impacte que l'argument des coefficients de la DSF ($|C_n^{(x)}| = |C_n|$).

Propriété (Décalage temporel)

Soit $s(t)$ un signal T_0 périodique dont les coefficients de la DSF sont notés C_n . Les coefficients de la DSF de $x(t) = s(t - \tau)$ s'expriment sous la forme :

$$C_n^{(x)} = C_n e^{-2j\pi n f_0 \tau}$$

- ▶ Retarder ou avancer un signal dans le temps n'impacte que l'argument des coefficients de la DSF ($|C_n^{(x)}| = |C_n|$).

Propriété (Dérivation)

Soit $s(t)$ un signal T_0 périodique dont les coefficients de la DSF sont notés C_n . Les coefficients de la DSF de $s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ s'expriment sous la forme :

$$C_n' = 2j\pi n f_0 C_n$$

Propriété (Identité de Parseval)

La puissance moyenne totale d'un signal périodique est égale à

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2.$$

- ▶ $P_n = |C_n|^2$ correspond à la puissance relative à la composante de fréquence $n f_0$.

Démonstration

En utilisant l'expression de la puissance moyenne totale pour les signaux périodiques, nous obtenons :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t) s^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_n C_m^* \int_{[T_0]} e^{2j\pi(n-m)f_0 t} dt$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions exponentielles sur une période, il en vient que :

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2.$$

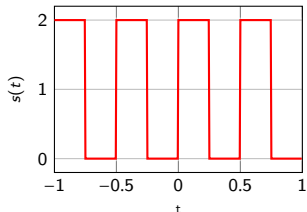
Spectre d'amplitude et de phase bilatéral

- ▶ Le **spectre d'amplitude bilaterale** correspond à la représentation graphique du module $|C_n|$ en fonction de la fréquence nf_0 ($n \in \mathbb{Z}$).
- ▶ Le **spectre de phase bilaterale** correspond à la représentation graphique de l'argument $\arg[C_n]$ en fonction de la fréquence nf_0 ($n \in \mathbb{Z}$).

Remarques

- ▶ La représentation spectrale contient des spectres **en raies** c-a-d que $|C_n|$ et $\arg[C_n]$ sont nulles si n n'est pas un entier (représentation parcimonieuse).
- ▶ L'**enveloppe du spectre** est obtenue en représentant $|C_n|$ lorsque n (ou nf_0) est traité comme une variable *continue* n .
- ▶ Pour les signaux réels, la symétrie hermitienne impose:
 - ▶ un spectre d'amplitude bilaterale **pair**.
 - ▶ un spectre de phase bilaterale **impair**.

Spectre d'amplitude et de phase bilatéral



- Coefficients de la DSF complexe ($A=2$):

$$C_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & \text{pour } n=0 \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair et non nul} \\ -j \frac{A}{n\pi} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

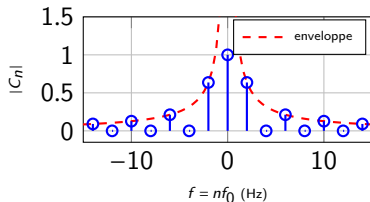


Figure 8: Spectre d'amplitude

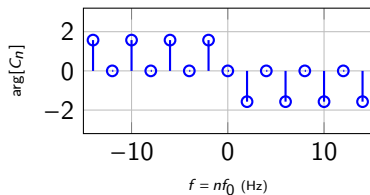


Figure 9: Spectre de phase

Spectre d'amplitude et de phase bilatéral (travail personnel)

- ▶ Enoncé: Nous considérons le signal suivant:

$$s(t) = 1 + \sin(2\pi f_0 t) + 3\cos(2\pi f_0 t) + \cos(6\pi f_0 t + \pi/4)$$

Déterminer et représenter le spectre d'amplitude et de phase du signal $x(t)$.

- ▶ Valeurs de C_n :

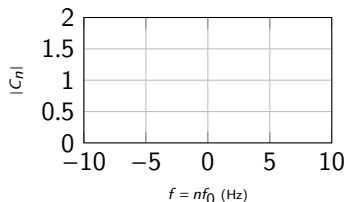


Figure 10: Spectre d'amplitude

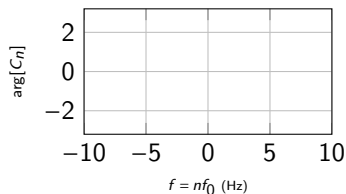
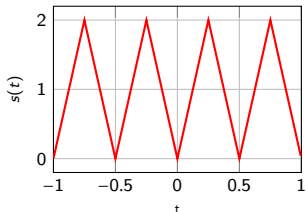


Figure 11: Spectre de phase

Spectre d'amplitude et de phase bilatéral



- Coefficients de la DSF complexe ($A=2$):

$$C_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & \text{pour } n=0 \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair et non nul} \\ -\frac{2A}{n^2\pi^2} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

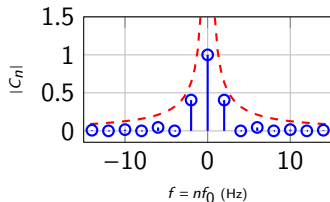


Figure 12: Spectre d'amplitude

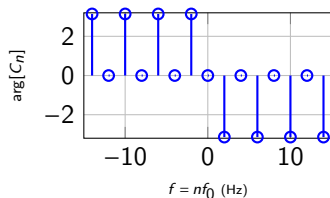


Figure 13: Spectre de phase

Comparaison spectre d'amplitude bilateral / monolateral

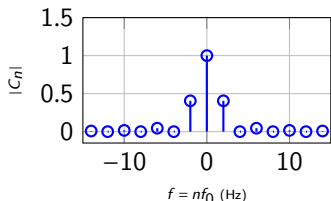


Figure 14: Spectre d'amplitude bilateral du signal triangulaire

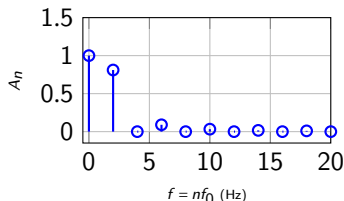


Figure 15: Spectre d'amplitude monolateral du signal triangulaire

- ▶ Pour les signaux réels, le spectre d'amplitude monolateral s'obtient à partir du spectre bilateral
 - ▶ En supprimant les fréquences négatives,
 - ▶ En laissant le coefficient en $f = 0$ ($A_0 = C_0$)
 - ▶ En doublant la valeur des coefficients pour $f > 0$ ($A_n = 2|C_n|$).

Spectre de puissance

- ▶ Le **spectre de puissance bilaterale** correspond à la représentation de la puissance des différentes composantes fréquentielles, $|C_n|^2$, en fonction de nf_0 .

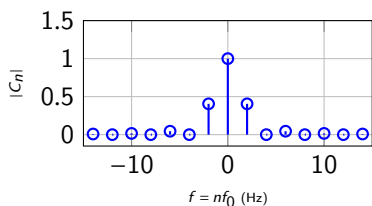
Remarque

- ▶ Le spectre de puissance monolateral s'obtient en représentant $P_n = 2|C_n|^2$ pour $n \geq 0$.

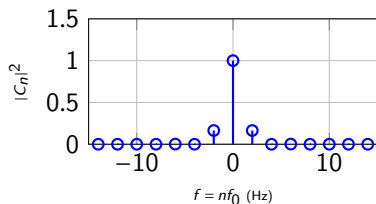
$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} (A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n))^2 dt \\ &= \frac{A_n^2}{2T_0} \left(\int_{[T_0]} 1 dt + \int_{[T_0]} \cos^2(2(\pi n f_0 t + \varphi_n)) dt \right) = \frac{A_n^2}{2} = \frac{(2|C_n|)^2}{2} \\ &= 2|C_n|^2 \end{aligned}$$

- ▶ Le spectre de puissance monolateral peut également s'exprimer en fonction de la valeur efficace $A_n^{eff} \triangleq \frac{A_n}{\sqrt{2}}$ au carré c-a-d $P_n = (A_n^{eff})^2$.

Spectre de puissance

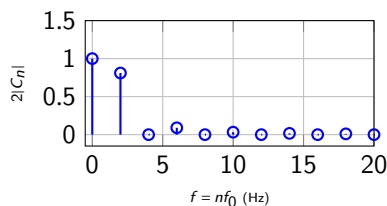


(a) Spectre d'amplitude

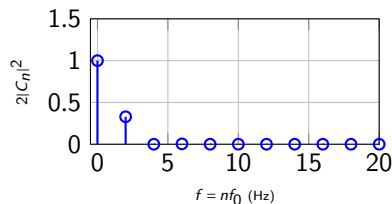


(b) Spectre de puissance

Figure 16: Spectre bilatéral



(a) Spectre d'amplitude



(b) Spectre de puissance

Figure 17: Spectre monolatéral

Synthèse des signaux périodiques

Problématique

La décomposition en Série de Fourier d'un signal $s(t)$ fait intervenir une infinité de termes :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2j\pi n f_0 t}.$$

Méthodologie

Nous allons approximer le signal $s(t)$ par le signal $\hat{s}_N(t)$ obtenu en forçant les coefficients de la DSF à 0 pour $|n| > N$ c-a-d

$$\hat{s}_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{2j\pi n f_0 t}.$$

- ▶ La qualité de l'approximation entre $s(t)$ et $\hat{s}_N(t)$ dépend naturellement de la valeur de N .

Exemple - Cas d'un signal triangulaire

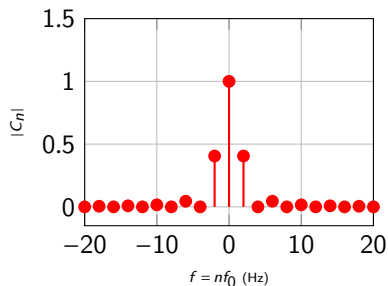


Figure 18: Spectre d'amplitude

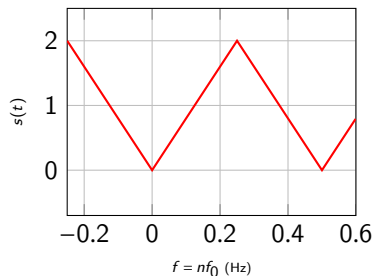


Figure 19: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal triangulaire

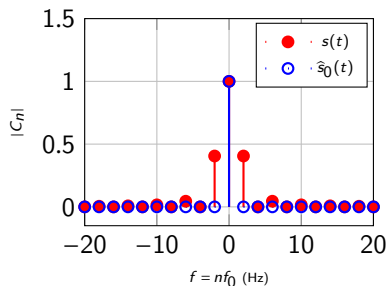


Figure 18: Spectre d'amplitude

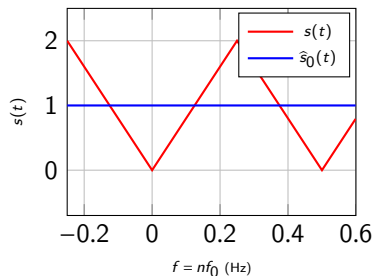


Figure 19: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal triangulaire

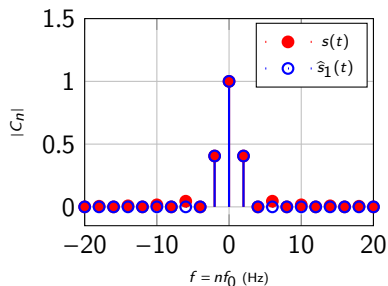


Figure 18: Spectre d'amplitude

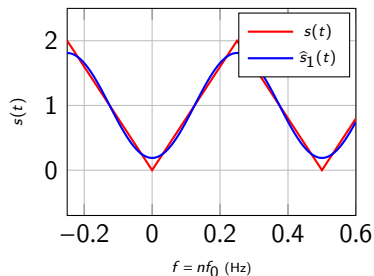


Figure 19: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal triangulaire

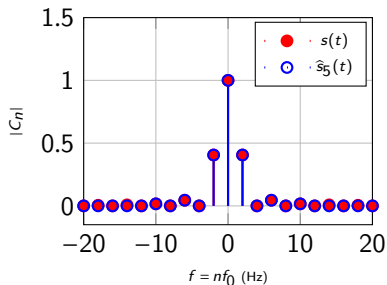


Figure 18: Spectre d'amplitude

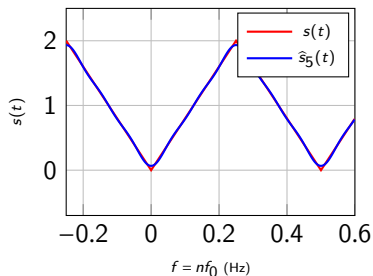


Figure 19: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal triangulaire

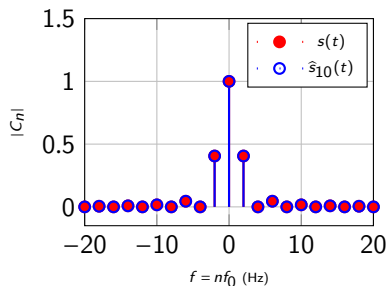


Figure 18: Spectre d'amplitude

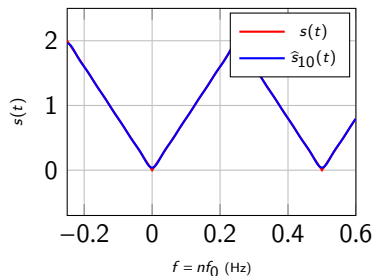


Figure 19: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal carré

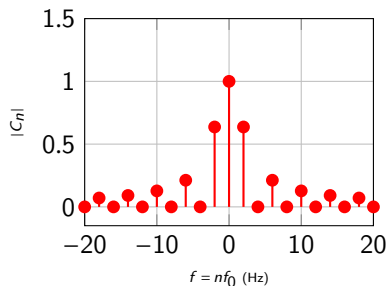


Figure 20: Spectre d'amplitude

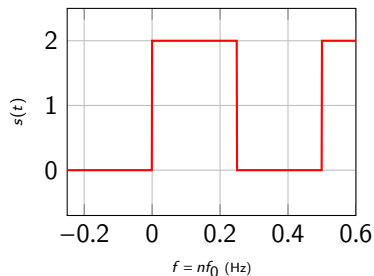


Figure 21: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal carré

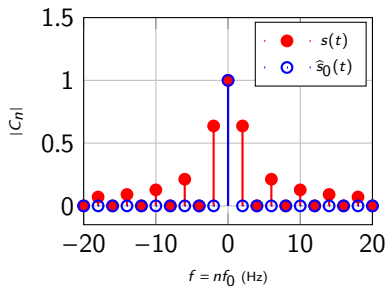


Figure 20: Spectre d'amplitude

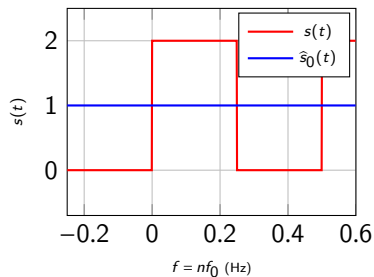


Figure 21: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal carré

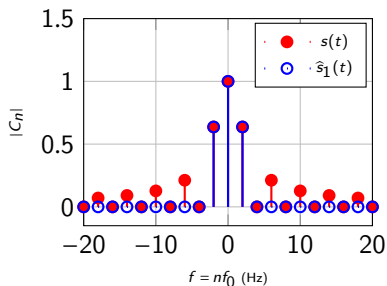


Figure 20: Spectre d'amplitude

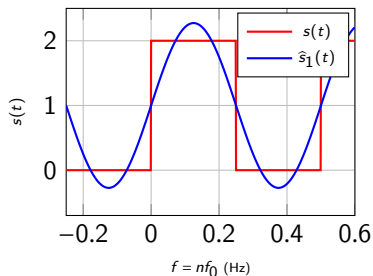


Figure 21: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal carré

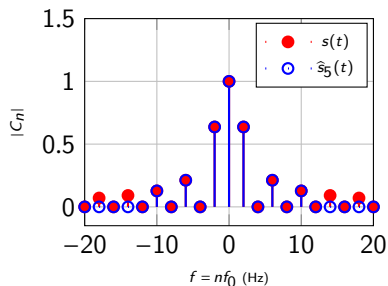


Figure 20: Spectre d'amplitude

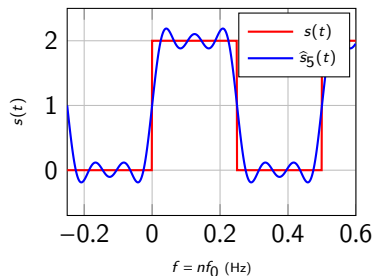


Figure 21: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal carré

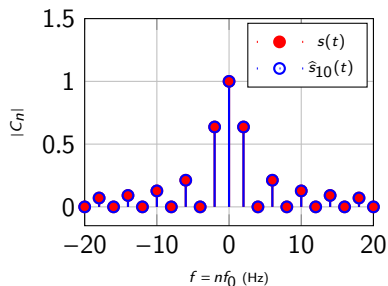


Figure 20: Spectre d'amplitude

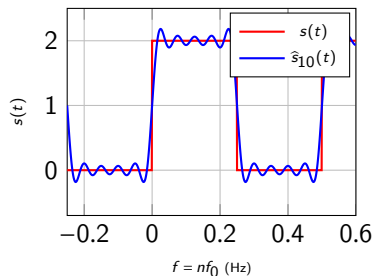


Figure 21: Synthèse

Exemple - Cas d'un signal carré

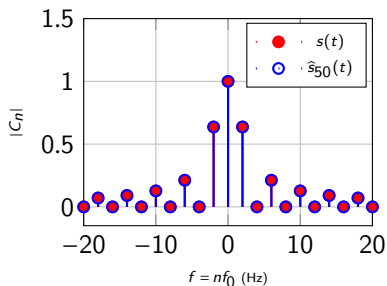


Figure 20: Spectre d'amplitude

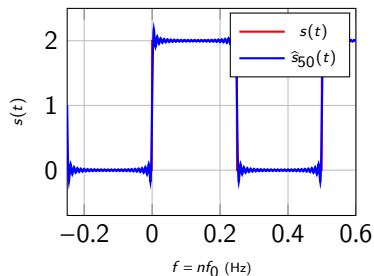


Figure 21: Synthèse

- ▶ Pour $N \gg 1$, présence d'oscillations rapides aux points de discontinuité → **phénomène de Gibbs**

Exemple - Bonus

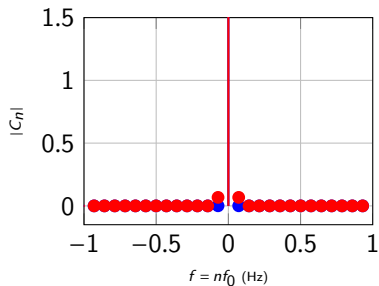


Figure 22: Spectre d'amplitude

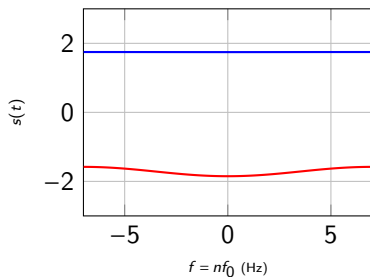


Figure 23: Synthèse

Exemple - Bonus

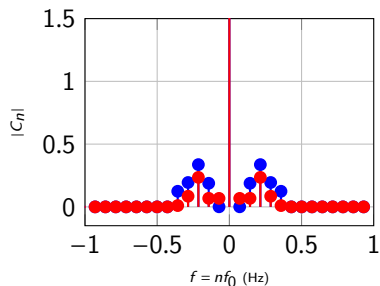


Figure 22: Spectre d'amplitude

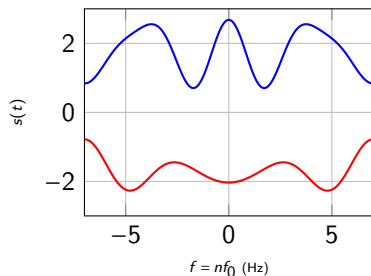


Figure 23: Synthèse

Exemple - Bonus

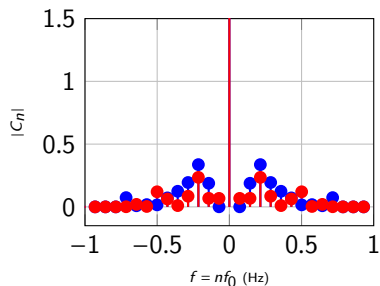


Figure 22: Spectre d'amplitude

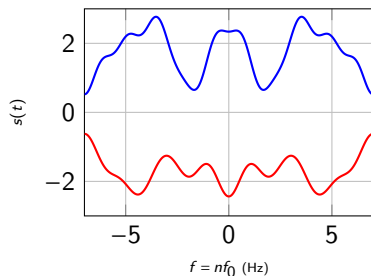


Figure 23: Synthèse

Exemple - Bonus

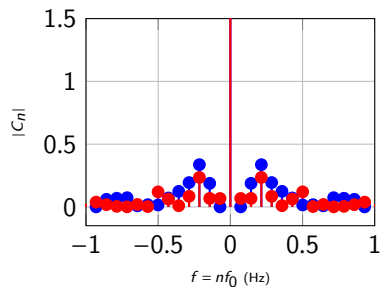


Figure 22: Spectre d'amplitude

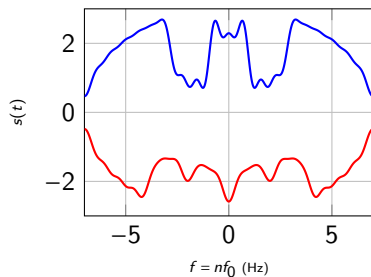


Figure 23: Synthèse

Exemple - Bonus

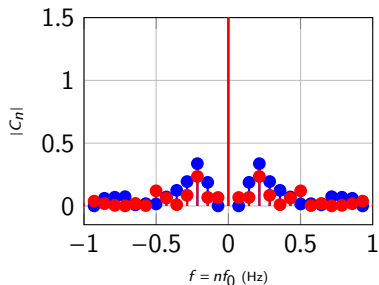


Figure 22: Spectre d'amplitude

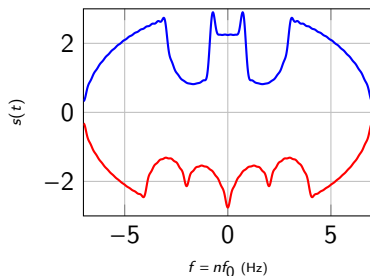


Figure 23: Synthèse