Traitement du Signal S5

Transformée de Fourier des signaux apériodiques

V. Choqueuse

Département Electronique, ENIB

Gitlab: `https://git.enib.fr/choqueuse/s5_signal/issues`

ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE BREST

Table des matières

Introduction

La transformée de Fourier
- Avant Propos
- Définitions
- Spectre d'amplitude et spectre de phase
- Exemples

Propriétés
- Impulsion de Dirac
- Signal Constant
- Signal Echelon
- Fenêtre Rectangulaire (Porte)
- Fenêtre Triangulaire
- Signal Sinusoïdal
- Signal Périodique
- Peigne de Dirac

Introduction

Problématique

- **Résumé de l'épisode précédent :** Nous avons appris à décomposer un signal périodique en une somme d'exponentielles complexes (ou de sinusoïdes) via la décomposition en Série de Fourier.
- **Problème :** Les signaux rencontrés en pratique ne sont jamais périodiques. Tout a un début et... une fin !

Méthodologie

Dans ce chapitre, nous allons étendre le principe de la décomposition en série de Fourier à la classe des signaux apériodiques.

- Décomposition en série de Fourier → **Transformée de Fourier**.

Avant Propos

- Soit $s(t)$ un signal T_0-périodique d'énergie finie sur une période,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2j\pi n f_0 t} \qquad \text{(Décomposition)}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-2j\pi n f_0 t} dt. \qquad \text{(Coefficients)}$$

- Pour les signaux $s(t)$ apériodiques, nous allons considérer que le signal se répète sur une période...infinie !

  Lorsque $T_0 \to \infty$, nous allons utiliser les notations asymptotiques suivantes :

  - $nf_0 \to \nu$: ν est une variable continue,
  - $C_n T_0 \to S(\nu)$: $S(\nu)$ est une fonction continue,
  - $\frac{1}{T_0} \to \Delta\nu$: $\Delta\nu$ est une quantité infinitésimale.

La transformée de Fourier

Avant Propos

- Lorsque $T_0 \rightarrow \infty$, la décomposition peut s'exprimer sous la forme suivante (voir somme de Riemann) :

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2j\pi n f_0 t} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n T_0 e^{2j\pi n f_0 t} \frac{1}{T_0} \\
&= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nf_0) e^{2j\pi n f_0 t} \Delta\nu \\
&= \int_{-\infty}^{-\infty} S(\nu) e^{2j\pi \nu t} d\nu
\end{aligned}
$$

La fonction $S(\nu)$ s'exprime quand à elle sous la forme :

$$
\begin{aligned}
S(\nu) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} C_n T_0 = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-2j\pi n f_0 t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2j\pi \nu t} dt
\end{aligned}
$$

La transformée de Fourier

Condition d'existence

Un signal $s(t) \in \mathbb{C}$ admet une Transformée de Fourier (TF) sil il est de carré sommable (c-a-d à énergie finie) c-a-d

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

- Certains signaux ne rentrent pas dans cette catégorie et n'admettent pas de TF au sens des fonctions, ils peuvent cependant avoir une TF au sens des distributions

Définition

La TF et la TF inverse sont définies par :

$$S(\nu) = TF[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2j\pi\nu t} dt \qquad \text{(TF)}$$

$$s(t) = TF^{-1}[S(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu \qquad \text{(TF Inverse)}$$

La transformée de Fourier

Remarques

$$S(\nu) = TF[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2j\pi\nu t}dt \qquad \text{(TF)}$$

$$s(t) = TF^{-1}[S(\nu)] = \int_{-\infty}^{-\infty} S(\nu)e^{2j\pi\nu t}d\nu \qquad \text{(TF Inverse)}$$

- La TF permet de passer d'une représentation temporelle (fonction de t) à une représentation fréquentielle (fonction de ν). La TF inverse permet de faire le chemin inverse.
- **WARNING**: Les deux expressions semblent très proches mais attention aux subtilités.
  - TF: intégration par rapport au temps (t), exponentielle avec un signe négatif ($-$).
  - TF inverse: intégration par rapport à la fréquence (ν), exponentielle avec un signe positif ($+$).

Spectre d'amplitude et spectre de phase

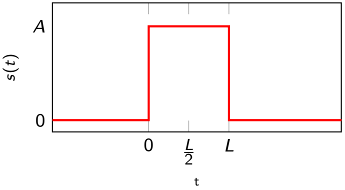
- Le **spectre d'amplitude** correspond à la représentation graphique du module $|S(\nu)|$ en fonction de la fréquence ν.
- Le **spectre de phase** correspond à la représentation graphique de l'argument $\arg[S(\nu)]$ en fonction de la fréquence ν.

Spectre d'amplitude et spectre de phase

- Les spectres d'amplitude et de phase sont des spectres continus.
- Pour les signaux réels , la symétrie hermitienne impose:
  - un spectre d'amplitude pair: $|X(\nu)| = |X(-\nu)|$,
  - un spectre de phase impair: $\arg[X(-\nu)] = -\arg[X(\nu)]$.

Exemples: Cas d'une impulsion rectangulaire (signal porte)

- Représentation du signal



- Modèle de signal : Mathématiquement, le signal s'exprime sous la forme ($A \geq 0$)

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < L, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Condition d'existence de la TF: La TF existe car

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt = \int_0^L A^2 \, dt = A^2 L < \infty$$

- Expression de la TF:

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2j\pi\nu t} \, dt = \int_0^L A e^{-2j\pi\nu t} \, dt \\ &= A \times \frac{1}{-2j\pi\nu} \left[e^{-2j\pi\nu t} \right]_0^L = \frac{A}{-2j\pi\nu} \left(e^{-2j\pi\nu L} - 1 \right) \\ &= \frac{A}{-2j\pi\nu} e^{-j\pi\nu L} \left(e^{-j\pi\nu L} - e^{+j\pi\nu L} \right) \\ &= \frac{A}{\pi\nu} \sin(\pi\nu L) e^{-j\pi\nu L} = AL\,\mathrm{sinc}(\pi\nu L) e^{-j\pi\nu L} \end{aligned}$$

- Spectre d'amplitude et de phase ($k \in \mathbb{Z}$):

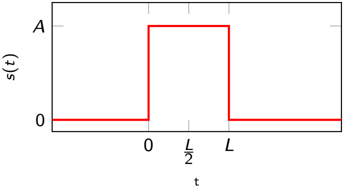
$$|S(\nu)| = AL \left| \frac{\sin(\pi\nu L)}{\pi\nu} \right|,$$

$$\arg[S(\nu)] = -\pi\nu L + \begin{cases} 2k\pi & \text{si } \frac{\sin(\pi\nu L)}{\pi\nu} \geq 0 \\ (2k+1)\pi & \text{si } \frac{\sin(\pi\nu L)}{\pi\nu} < 0 \end{cases}$$

La transformée de Fourier - Exemples

Exemples: Cas d'une impulsion rectangulaire (signal porte)

- Représentation du signal



- Modèle de signal :

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < L, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Transformée de Fourier :

$$S(\nu) = AL\text{sinc}(\pi \nu L) e^{-j\pi\nu L}$$

- Spectre du signal

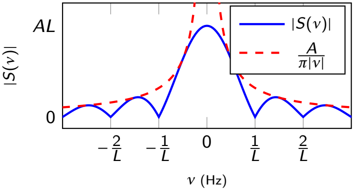


Figure 1: Spectre d'amplitude (vitesse de décroissance en $1/\nu$)

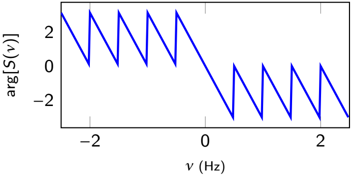
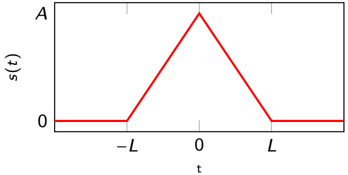


Figure 2: Spectre de phase

Exemples: Cas d'une impulsion triangulaire

- Représentation du signal



- Modèle de signal : Mathématiquement, le signal s'exprime sous la forme ($A \geq 0$)

$$s(t) = A\Delta_L(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{L}\right) & \text{si } 0 \leq |t| \leq L, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Condition d'existence de la TF: La TF existe car

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{2A^2 L}{3} < \infty$$

- Expression de la TF:

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2j\pi\nu t} dt \\ &= AL\left[\frac{\sin(\pi\nu L)}{\pi\nu L}\right]^2 \\ &= AL(\text{sinc}(\pi\nu L))^2 \end{aligned}$$

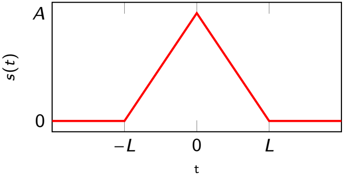
- Spectre d'amplitude et de phase ($k \in \mathbb{Z}$):

$$|S(\nu)| = AL(\text{sinc}(\pi\nu L))^2$$
$$\arg[S(\nu)] = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

La transformée de Fourier - Exemples

Exemples: Cas d'une impulsion triangulaire

- Représentation du signal



- Modèle de signal :

$$s(t) = A\Delta_L(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{L}\right) & \text{si } 0 \leq |t| \leq L, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Transformée de Fourier :

$$S(\nu) = AL(\text{sinc}(\pi \nu L))^2$$

- Spectre du signal

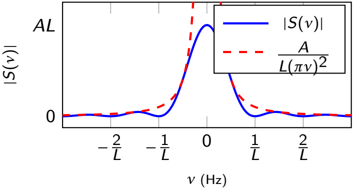


Figure 3: Spectre d'amplitude (vitesse de décroissance en $1/(\nu^2)$)

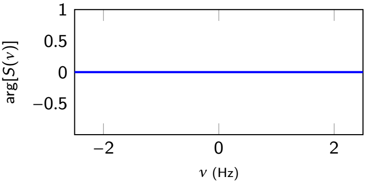
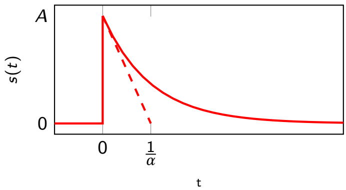


Figure 4: Spectre de phase

Exemples: Cas d'une impulsion exponentielle décroissante

- Représentation du signal



- Modèle de signal : Mathématiquement, le signal s'exprime sous la forme ($\alpha \geq 0$, $A \geq 0$)

$$s(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$$

- Condition d'existence de la TF: La TF existe car

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{A^2}{2\alpha} < \infty$$

- Expression de la TF:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2j\pi\nu t}dt = \int_{0}^{\infty} Ae^{-\alpha t}e^{-2j\pi\nu t}dt$$
$$= \frac{A}{\alpha + 2j\pi\nu}$$

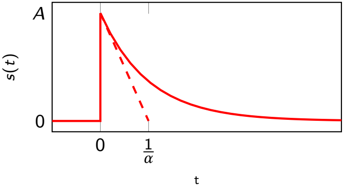
- Spectre d'amplitude et de phase ($k \in \mathbb{Z}$):

$$|S(\nu)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}},$$
$$\arg[S(\nu)] = -\arctan\left(\frac{2\pi\nu}{\alpha}\right) + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

La transformée de Fourier - Exemples

Exemples: Cas d'une impulsion exponentielle décroissante

- Représentation du signal



- Spectre du signal

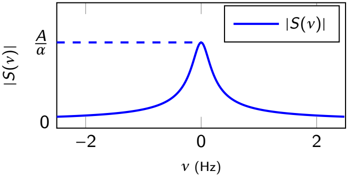


Figure 5: Spectre d'amplitude (vitesse de décroissance en $1/\nu$)

- Modèle de signal :

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t < L, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Transformée de Fourier :

$$S(\nu) = AL\mathrm{sinc}(\pi\nu L)e^{-j\pi\nu L}$$

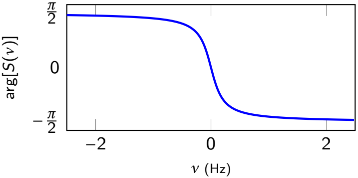


Figure 6: Spectre de phase

Propriétés

Avant Propos

Pour déterminer la TF d'un signal $s(t)$, le calcul de l'intégrale ne doit être réalisé qu'en dernier recours. Idéalement, nous préférons utiliser les propriétés de la TF pour déterminer $S(\nu)$ rapidement.

Propriété (Linéarité)

Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ deux signaux de TF respectives $S_1(\nu)$ et $S_2(\nu)$. La TF de $y(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$ est donnée par :

$$Y(\nu) = \alpha_1 S_1(\nu) + \alpha_2 S_2(\nu).$$

Propriété (Conjugaison)

Soit $s(t) \in \mathbb{C}$ un signal dont la TF est noté $S(\nu)$. La TF de son complexe conjugué $s^*(t)$ est égale à :

$$TF[s^*(t)] = S^*(-\nu)$$

- Lorsque $s(t) \in \mathbb{R}$ (c-a-d $s(t) = s^*(t)$), $S(\nu) = S^*(-\nu)$ (**symétrie hermitienne**)

Propriétés

Propriété (Parité)

Soit $s(t)$ un signal dont la TF est notée $S(\nu)$.

- Si $s(t)$ est **pair**, alors $S(\nu)$ est réel et pair,
- Si $s(t)$ est **impair**, alors $S(\nu)$ est imaginaire pur et impair.

Propriété (Translation ou retard)

Soit $s(t)$ un signal dont la TF est notée $S(\nu)$. La TF de sa version retardée $s(t-\tau)$ est donnée par :

$$TF[s(t-\tau)] = S(\nu)e^{-2j\pi\nu\tau}.$$

- Dans le domaine fréquentiel, un retard se visualise en regardant le spectre de phase.

Propriété (Homothétie et changement d'échelle)

Soit $s(t)$ un signal dont la TF est notée $S(\nu)$. La TF de sa version dilatée / compactée $s(\alpha t)$ est donnée par ($\alpha > 0$):

$$TF[s(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)$$

Propriété (Dérivation)

Soit $s(t)$ un signal dont la TF est notée $S(\nu)$. La TF de sa dérivée n^{ieme} $\frac{d^n s(t)}{dt^n}$ est donnée par:

$$TF\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] = (2j\pi\nu)^n S(\nu)$$

Propriétés

Propriété (Dualité)

Soit $s(t)$ un signal dont la TF est notée $S(\nu)$. La TF du signal $S(t)$ est donnée par:

$$TF[S(t)] = s(-\nu)$$

Propriété (Convolution)

Le produit de convolution est défini par :

$$h \star s(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s(t-\tau)d\tau$$

La TF du signal $h \star s(t)$ s'exprime sous la forme:

$$TF[h \star s(t)] = H(\nu) \times S(\nu)$$

- **WARNING**: La TF du signal modulé $h(t) \times s(t)$ est égale à $H \star S(\nu)$.

Propriétés

Propriété (Parseval)

Soit $s(t)$ un signal d'énergie finie E_s dont la TF est notée $S(\nu)$. L'énergie E_s peut se déterminer à partir de la TF via l'expression :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu.$$

- Démonstration présentée dans le polycopié.
- En représentant $|S(\nu)|^2$, nous obtenons une représentation de la distribution de l'énergie du signal en fonction de la fréquence appelée **densité spectrale d'énergie** (ou spectre d'énergie).

Propriété (Parseval)

Soit $s(t)$ un signal d'énergie finie E_s dont la TF est notée $S(\nu)$. L'énergie E_s peut se déterminer à partir de la TF via l'expression :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu.$$

- Démonstration présentée dans le polycopié.
- En représentant $|S(\nu)|^2$, nous obtenons une représentation de la distribution de l'énergie du signal en fonction de la fréquence appelée **densité spectrale d'énergie** (ou spectre d'énergie).

Résumé

Propriété	Fonction	Transformée de Fourier
Définition	$s(t)$	$S(\nu)$
Dualité	$S(t)$	$s(-\nu)$
Convolution	$s_1 \star s_2(t)$	$S_1(f)S_2(\nu)$
Multiplication	$s_1(t)s_2(t)$	$S_1 \star S_2(\nu)$
Translation	$s(t-\tau)$	$e^{-2j\pi\tau f}S(\nu)$
Modulation	$e^{2j\pi f_0 t}s(t)$	$S(\nu - f_0)$
Changement d'échelle	$s(t/\alpha)$	$\|\alpha\|S(\alpha\nu)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(2j\pi\nu)^n S(\nu)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-\nu)$
Symétrie Hermitienne	$f(t) \in \mathbb{R}$	$S(-\nu) = S^*(\nu)$

Table 1: Résumé des propriétés de la TF

Propriétés

Impulsion de Dirac

- Modèle de signal :

$$s(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

sous la contrainte
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$

- Transformée de Fourier :

$$\boxed{S(\nu) = TF[\delta(t)] = 1}$$

- Representations :

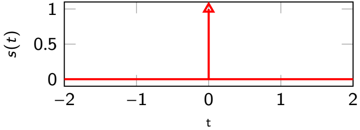


Figure 7: Représentation temporelle

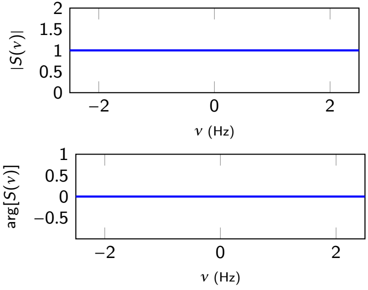


Figure 8: Spectre d'amplitude / phase

Propriétés

Signal Constant

- Modèle de signal :

$$s(t) = \alpha$$

- Transformée de Fourier :

$$\boxed{S(\nu) = \alpha\delta(f)}$$

WARNING: La transformée de Fourier d'un signal constant....n'est pas une constante, c'est un dirac !!!

- Representations :

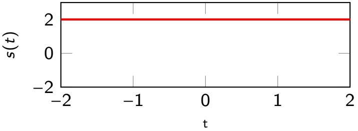


Figure 9: Représentation temporelle

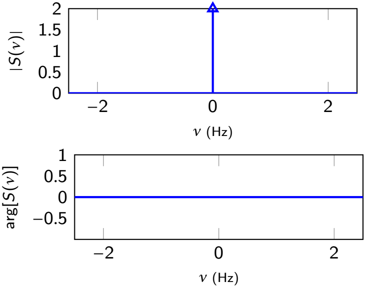


Figure 10: Spectre d'amplitude / phase

Propriétés

Signal Echelon

- Modèle de signal :

$$s(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

- Transformée de Fourier :

$$\boxed{S(\nu) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2j\pi\nu}}$$

- Representations :

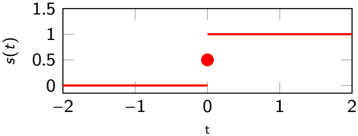


Figure 11: Représentation temporelle

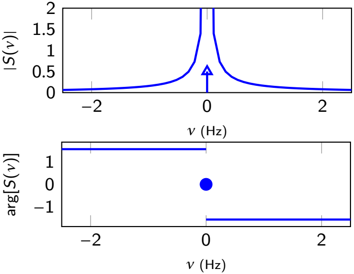


Figure 12: Spectre d'amplitude / phase

Propriétés

Fenêtre Rectangulaire (Porte)

- Modèle de signal :

$$s(t) = \Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Transformée de Fourier :

$$\boxed{S(\nu) = \frac{\sin(\pi \nu L)}{\pi \nu} = L\mathrm{sinc}(\pi \nu L)}$$

- Representations :

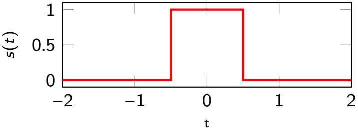


Figure 13: Représentation temporelle

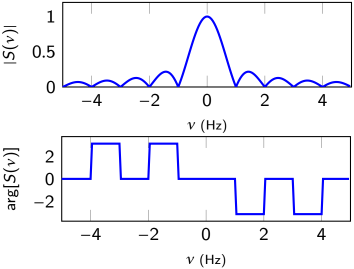


Figure 14: Spectre d'amplitude / phase

Propriétés

Fenêtre Triangulaire

- Modèle de signal :

$$s(t) = \Delta_L(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{L} & \text{si } |t| \leq L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Transformée de Fourier :

$$\boxed{S(\nu) = \frac{\sin^2(\pi \nu L)}{L(\pi \nu)^2} = L\text{sinc}^2(\pi \nu L)}$$

- Representations :

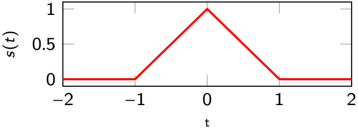


Figure 15: Représentation temporelle

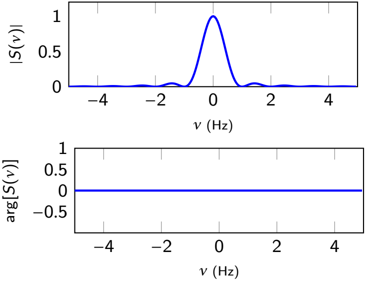


Figure 16: Spectre d'amplitude / phase

Propriétés

Signal Sinusoïdal

- Modèle de signal ($A > 0$):

$$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Transformée de Fourier :

$$\boxed{S(\nu) = \frac{Ae^{j\varphi}}{2}\delta(\nu - f_0) + \frac{Ae^{-j\varphi}}{2}\delta(\nu + f_0)}$$

- Representations :

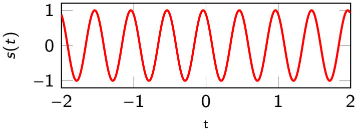


Figure 17: Représentation temporelle

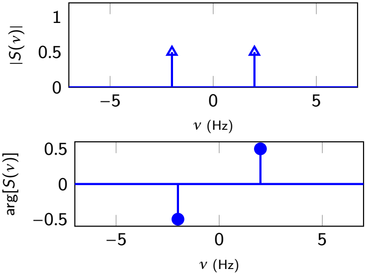


Figure 18: Spectre d'amplitude / phase

Propriétés

Signal Périodique

- Modèle de signal :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2j\pi n f_0 t}$$

- Transformée de Fourier :

$$\boxed{S(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\nu - n f_0)}$$

- Representations :

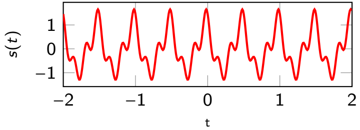


Figure 19: Représentation temporelle

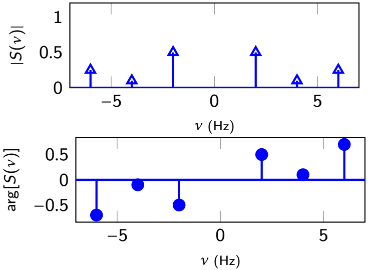


Figure 20: Spectre d'amplitude / phase

Propriétés

Peigne de Dirac

- Modèle de signal :

$$s(t) = p_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

- Transformée de Fourier :

$$\boxed{S(\nu) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T_0}\right)}$$

- Representations :

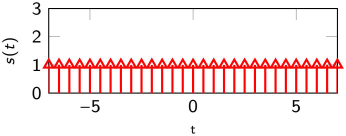


Figure 21: Représentation temporelle

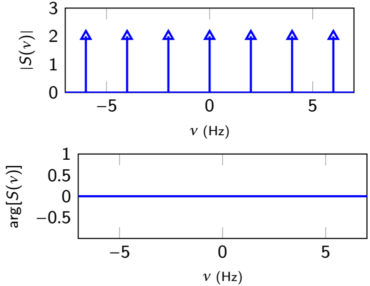


Figure 22: Spectre d'amplitude / phase