Traitement du Signal S5

Convolution et Filtrage

V. Choqueuse

Département Electronique, ENIB

Gitlab: `https://git.enib.fr/choqueuse/s5_signal/issues`

Table des matières

Introduction

Problématique

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s(t)$$

- **S4 Electronique :** Cours sur les systèmes LTIs décrit par une équation différentielle à coefficients constants.
- **Problème :**
  - Dans le contexte générale des systèmes LTIs, comment s'exprime la sortie $s(t)$ en fonction du signal d'entrée $e(t)$ et des "caractéristiques" du système ?

Objectifs

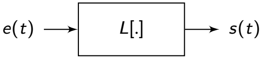
Dans ce chapitre, nous allons voir que:

- la sortie peut s'exprimer comme la convolution du signal $e(t)$ avec la réponse impulsionnelle du système $h(t)$.
- Dans le domaine fréquentielle, l'opération de convolution correspond à la multiplication de la TF de $e(t)$ par la TF de $h(t)$.

Systèmes continus LTI

Définition

Considérons un système décrit par un opérateur $L[.]$ et notons $s(t) = L[e(t)]$ la sortie du système lorsque l'entrée est égale à $e(t)$.



Un système est continu, linéaire et invariant dans le temps si il respecte les 3 propriétés suivantes :

- **Continu**: La variable t est continue (signaux analogiques).
- **Linéarité** : Si l'entrée est égale à $\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$, alors la sortie est égale à $\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$.
- **Invariant dans le temps** (stationnaire): Si l'entrée est égale à $e(t-\tau)$, alors la sortie est égale à $s(t-\tau)$.

Réponse du système

En utilisant les propriétés de l'impulsion de Dirac, il est possible d'exprimer un signal continu $e(t)$ sous la forme :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(u)\delta(t-u)du$$

En utilisant la continuité et la linéarité du système, la réponse à une entrée $e(t)$ s'exprime sous la forme :

$$s(t) = L[e(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e(u)L[\delta(t-u)]du$$

Soit $h(t) = L[\delta(t)]$ la réponse du système à une impulsion de Dirac. L'invariance en temps impose que $L[\delta(t-u)] = h(t-u)$ et donc :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e(t-u)du \triangleq (h * e)(t)$$

Systèmes continus LTI

Réponse du système **(BING!)**

La sortie d'un système LTI, notée $s(t)$, initialement au repos à une entrée quelconque $e(t)$ s'exprime sous la forme :

$$s(t) = (h * e)(t)$$

Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système, notée $h(t)$, correspond à la sortie du système lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac.

- La réponse impulsionnelle correspond à l'"empreinte" du système.

Produit de Convolution

Le produit de convolution est défini par:

$$(h * e)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e(t-u)du$$

Convolution des signaux audios

Figure 1: Mesure de réponses impulsionnelles pour des applications audios

- Logiciel Altiverb 7 (Vidéo)
- Module Convolution reverb d'Ableton live (Vidéo)
- Plugin Reflektor de Native Instrument (Vidéo)
- Module Blend IR des copains de Two Notes (Vidéo)

Exercice (réponse indicielle)

Considérons un système de premier ordre régit par l'équation différentielle suivante:

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Il est possible de montrer que la réponse impulsionnelle du système s'exprime sous la forme:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Déterminer la réponse indicielle du système $(e(t) = u(t))$,
- Représenter la réponse impulsionnelle et indicielle du système.

Exercice (réponse indicielle)

Soit

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Lorsque $e(t) = u(t)$, la réponse du système est donnée par :

$$\begin{aligned} s(t) &= (h * u)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e(u) h(t-u) du = \int_{0}^{\infty} h(t-u) du = \int_{0}^{t} h(t-u) du \\ &= \frac{K}{\tau} \int_{0}^{t} e^{-\frac{t-u}{\tau}} du = \frac{K}{\tau} \left[\tau e^{-\frac{t-u}{\tau}} \right]_{0}^{t} = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

- La seconde ligne s'obtient en utilisant respectivement le fait que $e(t) = 0$ si $t < 0$, puis que $h(t) = 0$ si $t < 0$.

Exercice (réponse indicielle)

$$e(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow s(t) = (h * e)(t)$$

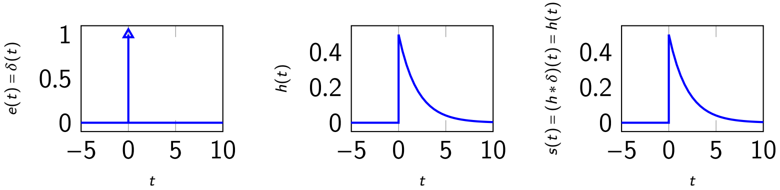


Figure 2: Réponse Impulsionnelle

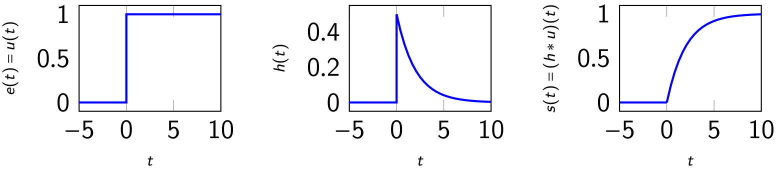


Figure 3: Réponse Indicielle

Produit de Convolution

Définition

Le produit de convolution est défini mathématiquement par:

$$(h * e)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e(t-u)du$$

- **WARNING**: L'intégration se fait par rapport à une variable "muette" u qui n'apparait pas dans le résultat du calcul. Le résultat est une fonction qui dépend du temps t.
- Par abus de notation, nous utiliserons parfois l'expression $h(t) * e(t)$.

Produit de Convolution

Exercice

Déterminer le produit de convolution suivant $(x * x)(t)$ où $x(t)$ est une porte de largeur L et d'amplitude A c-a-d :

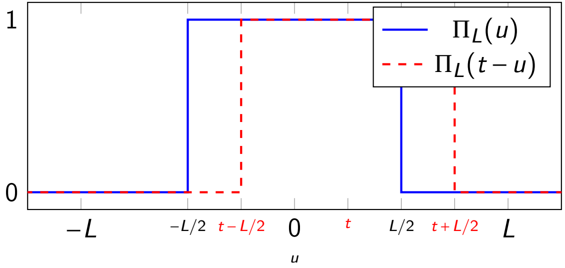
$$x(t) = A\Pi_L(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exercice (Solution)

Le produit de convolution s'exprime sous la forme

$$(x * x)(t) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_L(u)\Pi_L(t-u)du$$

- Avant de calculer le produit de convolution, il est important de bien représenter les signaux $\Pi_L(u)$ et $\Pi_L(t-u)$ en fonction de t et u.



Exercice (Solution)

Le produit de convolution s'exprime sous la forme

$$(x * x)(t) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_L(u)\Pi_L(t-u)du$$

- **Cas où $t + \frac{L}{2} \leq -\frac{L}{2}$:**
  - Dans ce cas, nous avons $t \leq -L$.
  - Lorsque $t \leq -L$, il n'y a pas d'intersection entre $\Pi_L(u)$ et $\Pi_L(t-u)$.
  - Cela implique que

$$(x * x)(t) = A^2 \times 0 = 0$$

Exercice (Solution)

Le produit de convolution s'exprime sous la forme

$$(x * x)(t) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_L(u)\Pi_L(t-u)du$$

- **Cas où $t + \frac{L}{2} > -\frac{L}{2}$ et $t + \frac{L}{2} \leq \frac{L}{2}$:**
  - Dans ce cas, nous avons $-L < t \leq 0$.
  - Lorsque $-L < t \leq 0$, il a intersection entre $\Pi_L(u)$ et $\Pi_L(t-u)$ dans l'intervalle $]-\frac{L}{2}, t + \frac{L}{2}]$.
  - Cela implique que

$$\begin{aligned}(x * x)(t) &= A^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{t+\frac{L}{2}} 1 \times 1 du = A^2 [u]_{-\frac{L}{2}}^{t+\frac{L}{2}} = A^2 \left(t + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right) \\ &= A^2(t+L)\end{aligned}$$

Exercice (Solution)

Le produit de convolution s'exprime sous la forme

$$(x * x)(t) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_L(u)\Pi_L(t-u)du$$

- **Cas où $t + \frac{L}{2} > \frac{L}{2}$ et $t - \frac{L}{2} \leq \frac{L}{2}$:**
  - Dans ce cas, nous avons $0 < t \leq L$.
  - Lorsque $0 < t \leq L$, il a intersection entre $\Pi_L(u)$ et $\Pi_L(t-u)$ dans l'intervalle $]t - \frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$.
  - Cela implique que

$$\begin{aligned}(x * x)(t) &= A^2 \int_{t-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 1 \times 1 du = A^2 [u]_{t-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = A^2 \left(\frac{L}{2} - (t - \frac{L}{2}) \right) \\ &= A^2(-t + L)\end{aligned}$$

Produit de Convolution

Exercice (Solution)

Le produit de convolution s'exprime sous la forme

$$(x * x)(t) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_L(u)\Pi_L(t-u)du$$

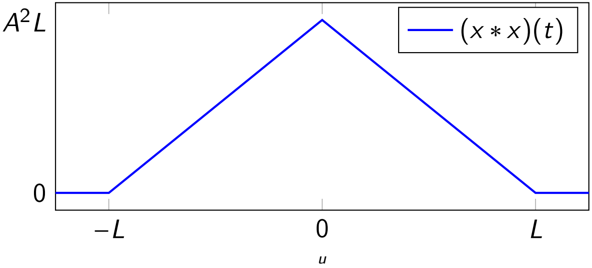
- **Cas où $t - \frac{L}{2} > \frac{L}{2}$:**
  - Dans ce cas, nous avons $t > L$.
  - Lorsque $t > L$, il n'y a pas d'intersection entre $\Pi_L(u)$ et $\Pi_L(t-u)$.
  - Cela implique que

$$(x * x)(t) = 0$$

Exercice (Solution)

Le produit de convolution s'exprime sous la forme

$$(x*x)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -L \\ A^2(t+L) & \text{si } -L < t \leq 0 \\ A^2(-t+L) & \text{si } 0 < t \leq L \\ 0 & \text{si } t > L \end{cases}$$



Propriété (Théorème Fondamental de la Convolution)

- **Avant Propos :** Lorsqu'un signal $e(t) = e^{2j\pi f_0 t}$ est envoyé à l'entrée d'un système LTI caractérisé par la réponse impulsionnelle $h(t)$, alors la sortie s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}(h * e)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{2j\pi f_0 (t-u)}du \\ &= e^{2j\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-2j\pi f_0 u}du \\ &= H(f_0)e^{2j\pi f_0 t}\end{aligned}$$

où $H(\nu) \triangleq TF[h(t)]$ désigne la Transformée de Fourier de $h(t)$.

  - Les exponentielles complexes sont les fonctions propres du produit de convolution.
  - Par extension, lorsqu'une sinusoïde de fréquence f_0 est envoyé à l'entrée d'un système LTI, la sortie est également une sinusoïde de fréquence f_0.

Produit de Convolution

Propriété (Théorème Fondamental de la Convolution)

Si $s(t) = (h * e)(t)$, alors nous obtenons dans le domaine fréquentiel

$$\boxed{S(\nu) = H(\nu)E(\nu)}$$

- $E(\nu) = TF[e(t)]$ et $S(\nu) = TF[s(t)]$ désignent les Transformées de Fourier de $e(t)$ et de $s(t)$.
- $H(\nu) = TF[h(t)]$ est appelée fonction de transfert du système.

Remarque

- Convoluer deux signaux dans le domaine temporel revient à les multiplier dans le domaine fréquentiel $\rightarrow$ notion de filtrage.
- (Dualité): Multiplier deux signaux dans le domaine temporel revient à les convoluer dans le domaine fréquentiel.

Produit de Convolution

Avant Propos

Le produit de convolution est généralement assez difficile à calculer. Pour simplifier les calculs, nous essayerons en priorité d'utiliser ses propriétés.

Propriété (Commutativité)

$$(x * y)(t) = (y * x)(t)$$

- **Démonstration**:

Produit de Convolution

Avant Propos

Le produit de convolution est généralement assez difficile à calculer. Pour simplifier les calculs, nous essayerons en priorité d'utiliser ses propriétés.

Propriété (Commutativité)

$$(x * y)(t) = (y * x)(t)$$

- **Démonstration**: Par définition, nous avons :

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

En posant $u = t - \tau$, nous obtenons $\frac{du}{d\tau} = -1$ et donc

$$(x * y)(t) = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)y(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)x(t-u)du = (y * x)(t)$$

Propriété (Distributivité par rapport à la somme)

$$(x * (y + z))(t) = (x * y)(t) + (x * z)(t)$$

- **Démonstration**:

Produit de Convolution

Propriété (Distributivité par rapport à la somme)

$$(x*(y+z))(t) = (x*y)(t) + (x*z)(t)$$

- **Démonstration**: En utilisant la propriété de linéarité de l'intégrale, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(x*(y+z))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)(y(t-\tau)+z(t-\tau)))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau \\
&= (x*y)(t) + (x*z)(t)
\end{aligned}$$

Produit de Convolution

Propriété (Non distributivité par rapport au produit)

$$x * (y \times z)(t) \neq (x * y)(t) \times (x * z)(t)$$

Associativité

Le produit de convolution est associatif c-a-d

$$((x * y) * z)(t) = (x * (y * z))(t)$$

- **Démonstration**:

Associativité

Le produit de convolution est associatif c-a-d

$$((x*y)*z)(t) = (x*(y*z))(t)$$

- **Démonstration**: Nous obtenons :

$$\begin{aligned}((x*y)*z)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x*y)(\tau_1) \times z(t-\tau_1) d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_2) y(\tau_1-\tau_2) z(t-\tau_1) d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_2) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau_1-\tau_2) z(t-\tau_1) d\tau_1\right) d\tau_2\end{aligned}$$

Or, l'intégrale centrale est simplement égale à $(y*z)(t-\tau_2)$. Donc,

$$((x*y)*z)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_2)((y*z)(t-\tau_2))\, d\tau_2 = (x*(y*z))(t)$$

Propriété (Convolution avec une impulsion de Dirac)

$$x(t) * \delta(t-\tau) = x(t-\tau)$$

- L'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution $(x(t) * \delta(t) = x(t))$

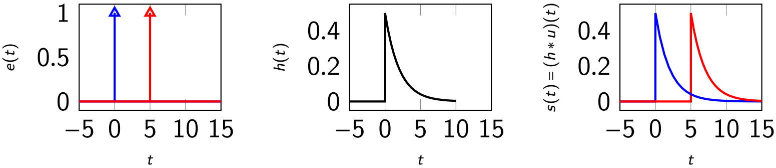


Figure 4: Réponse du système

Produit de Convolution

Propriété (Convolution avec une impulsion de Dirac)

$$x(t) * \delta(t-\tau) = x(t-\tau)$$

- L'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution $(x(t) * \delta(t) = x(t))$
- **Démonstration**: Notons $\delta_u(t) = \delta(t-u)$. En utilisant la définition du produit de convolution, nous trouvons :

$$\begin{aligned}(x * \delta_u)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta_u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-u)d\tau\end{aligned}$$

  Cette intégrale est non nulle lorsque $t-\tau-u=0$ c-a-d lorsque $\tau = t-u$. En utilisant les propriétés de l'impulsion de Dirac, nous obtenons alors

$$(x * \delta_u)(t) = x(t-u)$$

Propriété (Décalage dans le temps)

Soit $z(t) = (x * y)(t)$. Si $x_{\tau_1}(t) \triangleq x(t-\tau_1)$ et $y_{\tau_2}(t) \triangleq y(t-\tau_2)$, alors

$$(x_{\tau_1} * y_{\tau_2})(t) = z(t-(\tau_1+\tau_2))$$

- Pour $\tau = \tau_1 = \tau_2 \neq 0$, $(x_\tau * y_\tau)(t) = z(t-2\tau) \neq z(t-\tau)$.
- **Démonstration**:

Propriété (Décalage dans le temps)

Soit $z(t) = (x * y)(t)$. Si $x_{\tau_1}(t) \triangleq x(t-\tau_1)$ et $y_{\tau_2}(t) \triangleq y(t-\tau_2)$, alors

$$(x_{\tau_1} * y_{\tau_2})(t) = z(t-(\tau_1+\tau_2))$$

- Pour $\tau = \tau_1 = \tau_2 \neq 0$, $(x_\tau * y_\tau)(t) = z(t-2\tau) \neq z(t-\tau)$.
- **Démonstration**: En utilisant la définition du produit de convolution et en utilisant le changement de variable $\tau - \tau_1 = u$, nous obtenons :

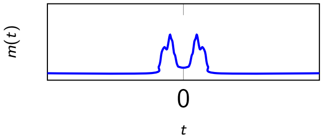
$$\begin{aligned}(x_{\tau_1} * y_{\tau_2})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{\tau_1}(\tau) y_{\tau_2}(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-\tau_1) y(t-\tau-\tau_2) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-\tau_1-\tau_2-u) du \\ &= z(t-(\tau_1+\tau_2))\end{aligned}$$

avec $z(t) = (x * y)(t)$.

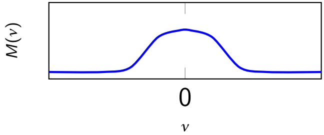
Exercice

TF d'un signal périodique

Soit $m(t)$ un motif de forme quelconque dont le spectre $M(\nu)$ est représenté ci-dessous :



(a) Représentation Temporelle



(b) Représentation Fréquentielle

En périodisant le motif $m(t)$ à la période T_0, nous obtenons le signal T_0-périodique $x_{T_0}(t)$ suivant:

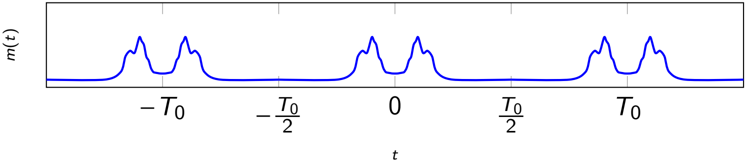


Figure 6: Représentation Temporelle de $x_{T_0}(t)$

Exercice

TF d'un signal périodique

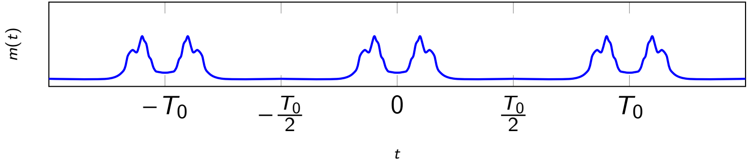
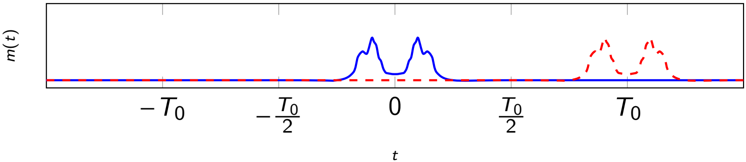


Figure 7: Représentation Temporelle de $x_{T_0}(t)$

- Exprimer le signal $x_{T_0}(t)$ sous la forme du produit de convolution du motif $m(t)$ par une fonction $f(t)$ à déterminer.
- En déduire $X(\nu)$ le spectre de $x_{T_0}(t)$.
- Etablir le lien entre $M(\nu)$, le spectre de $m(t)$, et C_n les coefficients de la DSF de $x_{T_0}(t)$.

TF d'un signal périodique (Solution)

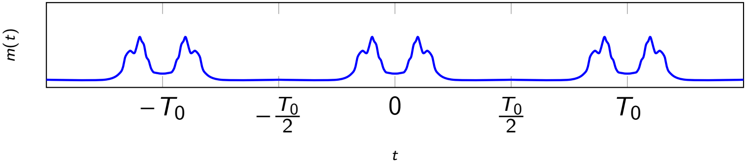


- En utilisant la propriété de convolution, nous obtenons :

$$y(t) = m(t - T_0) = m * \delta(t - T_0)$$

Exercice

TF d'un signal périodique (Solution)



- En utilisant la propriété de convolution, nous obtenons :

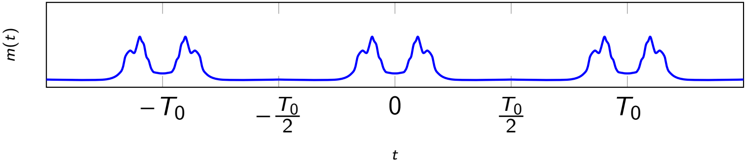
$$y(t) = m(t - T_0) = m * \delta(t - T_0)$$

- Par extension, nous obtenons (distributivité par rapport à la somme) :

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m * \delta(t - nT_0) \\ &= m * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \right) \\ &= m * p_{T_0}(t) \end{aligned}$$

Exercice

TF d'un signal périodique (Solution)



- Nous obtenons finalement (convolution avec un peigne de Dirac) :

$$\boxed{x_{T_0}(t) = m * p_{T_0}(t)}$$

Exercice

TF d'un signal périodique (Solution)

- En fréquentiel, nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
X_{T_0}(\nu) &= M(\nu) \times P_{T_0}(\nu) \\
&= \frac{1}{T_0} M(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T_0}\right) \\
&= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\nu)\delta\left(\nu - \frac{n}{T_0}\right)
\end{aligned}
$$

c-a-d

$$
\boxed{X_{T_0}(\nu) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M\left(\frac{n}{T_0}\right)\delta\left(\nu - \frac{n}{T_0}\right)}
$$

Exercice

TF d'un signal périodique (Solution)

- Lien avec la décomposition en série de Fourier: Pour un signal périodique, nous avons :

$$X_{T_0}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\nu - n f_0)$$

Par identification, nous trouvons :

$$C_n = \frac{1}{T_0} M\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

TF d'un signal périodique (Solution)

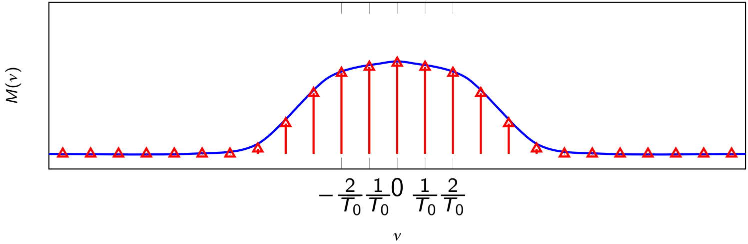


Figure 8: Représentation Fréquentielle ($T_0 = 1$ s)

- Périodiser un signal revient à échantillonner sa transformée de Fourier.

Exercice

TF d'un signal périodique (Solution)

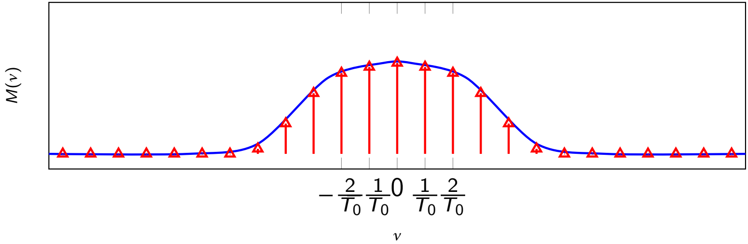


Figure 8: Représentation Fréquentielle ($T_0 = 1$ s)

- Périodiser un signal revient à échantillonner sa transformée de Fourier.
- (Dualité: Echantillonner un signal revient à périodiser sa transformée de Fourier !)