Traitement du Signal S5

Filtrage Linéaire de Signaux Analogiques

V. Choqueuse

Département Electronique, ENIB

Gitlab: `https://git.enib.fr/choqueuse/s5_signal/issues`

Table des matières

Généralités

Définition

- Un filtre est un système linéaire et invariant dans le temps.

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{Filtre}} \longrightarrow s(t)$$

Exemples

Notons $x(t)$ l'entrée du système et $y(t)$ sa sortie.

- Modulateur: $y(t) = m(t) \times x(t)$
  - Système variant dans le temps: $m(t) \times x(t-\tau) \neq y(t-\tau)$.
- Quadrateur: $y(t) = x^2(t)$
  - Système non linéaire: $(\alpha x(t))^2 = \alpha^2 x^2(t) \neq \alpha y(t)$.
- Circuit régit par une équation différentielle à coefficients constants:
  - Système linéaire et invariant dans le temps $\rightarrow$ filtre.

Généralités

Propriété des filtres

- Un filtre est entièrement défini par:
  - sa réponse impulsionnelle: $h(t)$,
  - sa réponse fréquentielle (ou gain complexe): $H(\nu) = TF[h(t)]$.

Transformée de Laplace Vs Transformée de Fourier

- Objectifs :
  - La fonction de transfert $H(p) = TL[h(t)]$ permet l'étude du régime transitoire du filtre (stabilité, amortissement, etc),
  - La réponse fréquentielle $H(\nu) = TF[h(t)]$ suppose le régime permanent établi.
    - Réponse en amplitude du filtre: $|H(\nu)|$,
    - Réponse en phase du filtre: $\arg[H(\nu)]$,
- Passage de $H(p)$ à $H(\nu)$: Pour les systèmes causaux et réels,

$$H(\nu) = H(p)\Big|_{p=2j\pi\nu}$$

Réponse en amplitude et en phase

$$H(\nu) = TF[h(t)]$$

La réponse en fréquence d'un filtre est généralement complexe. Nous utiliserons alors deux représentations :

- La **réponse en amplitude** : $|H(\nu)|$,
- La **réponse en phase**: $\arg[H(\nu)]$.

Cas où $h(t) \in \mathbb{R}$

Lorsque $h(t) \in \mathbb{R}$, nous avons $H^*(\nu) = H(-\nu)$ (symétrie hermitienne). Nous en déduisons que :

- La réponse en amplitude est paire c-a-d $|H(-\nu)| = |H(\nu)|$
- La réponse en phase est impaire c-a-d $arg[H(-\nu)] = -\arg[H(\nu)]$.

Réponse en amplitude et en phase: Exemple pour un 1er ordre

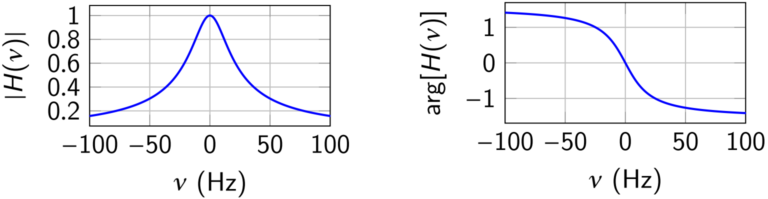


Figure 1: Réponse en amplitude et en phase (S5 signal)

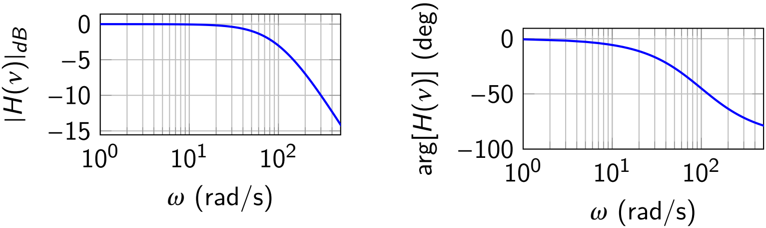


Figure 2: Diagramme de Bode (S4 électronique)

Généralités

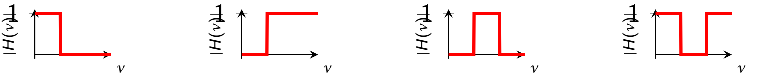
Pourquoi filtrer

- Mettre en valeur le signal d'interêt en supprimant le bruit,
- Supprimer certaines composantes fréquentielles,
- Supprimer les composantes hautes fréquences inutiles.

Filtrage Idéal: Réponse en amplitude et en phase

$$|H(\nu)| = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in \Omega \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad \text{(mur de brique)}$$

$$\arg[H(\nu)] = -2\pi\alpha\nu \qquad \text{(phase linéaire)}$$



(a) Passe-bas (b) Passe-haut (c) Passe-bande (d) Coupe bande

Figure 3: Filtres en "mur de brique"

Exemple: Filtrage passe-bas idéal

On considère le filtre passe-bas idéal suivant

$$|H(\nu)| = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq f_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$arg[H(\nu)] = 0$$

- Déterminez la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce filtre.
- La réponse impulsionnelle est-elle à support temporel borné ?

Généralités

Filtrage réalisable

- Filtre réalisable = Filtre Stable + Filtre Causal

Généralités

Filtrage réalisable

- Filtre réalisable = Filtre Stable + Filtre Causal

Stabilité : Définition

- Un filtre est dit BIBO stable si pour tout entrée bornée ($\max[|e(t)|] \leq E < \infty$), la sortie est également bornée.
- Borne sur la sortie:

$$|s(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||e(t-\tau)|d\tau < E\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

Généralités

Filtrage réalisable

- Filtre réalisable = Filtre Stable + Filtre Causal

Stabilité : Définition

- Un filtre est dit BIBO stable si pour tout entrée bornée ($\max[|e(t)|] \leq E < \infty$), la sortie est également bornée.
- Borne sur la sortie:

$$|s(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||e(t-\tau)| d\tau < E \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Stabilité : Condition

- Un filtre est BIBO stable si sa réponse impulsionnelle est sommable c-a-d

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty}$$

Causalité : Définition

- Un filtre est causal si sa sortie à l'instant t ne dépend que des entrées aux instants $t-\tau$ avec $\tau \geq 0$.
- Expression de la sortie d'un filtre causal

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

Causalité : Définition

- Un filtre est causal si sa sortie à l'instant t ne dépend que des entrées aux instants $t-\tau$ avec $\tau \geq 0$.
- Expression de la sortie d'un filtre causal

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

Causalité : Condition

- Un filtre est causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle est causale c-a-d

$$\boxed{h(t) = 0 \text{ pour } t < 0}$$

Causalité : Propriétés

- Un filtre à phase nulle (et à réponse impulsionnelle réelle) est nécessairement non causal
  - Preuve:
    - Si $\arg[H(\nu)] = 0$ alors $H(\nu) = |H(\nu)|e^{j\arg[H(\nu)]} = |H(\nu)|$.
    - Comme la réponse en amplitude est réelle et paire, la réponse en fréquence l'est également c-a-d que $H(\nu) = H(-\nu)$.
    - La transformée de Fourier inverse d'une TF réelle paire est un signal également réel et paire (chap 3, p 13) c-a-d $h(t) = h(-t)$
    - Comme $h(t) = h(-t)$, $h(t) \neq 0$ pour $t < 0$.
- Pour un filtre causal, il ne sera pas possible d'imposer à la fois l'amplitude et la phase (relation de Bayard-Bode).

Fonction de Transfert Rationnelle (ordre n)

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

- **Stabilité** : Les pôles de la fonction de transfert ($D(p_k) = 0$) sont à partie réelle strictement négative.
- **Causalité** : Le degré du dénominateur est supérieure ou égal au degré du numérateur c-a-d $m \leq n$.

Cascade de Filtres

- Un filtre d'ordre n peut être réalisée en cascadant des filtres de premier et de second ordre.

$$H(p) = \prod_{l=1}^{v} H_l(p) = \underbrace{H_1(p) \times \cdots \times H_u(p)}_{premier\ \ ordre} \times \underbrace{H_{u+1}(p) \times \cdots \times H_v(p)}_{second\ \ ordre}$$

Filtres de premier et second ordre ($p \rightarrow 2j\pi\nu$)

Type	Ordre	Fonction de transfert	Réponse en fréquence
Passe-bas	1	$H(p) = \frac{1}{\tau p+1}$	$H(\nu) = \frac{1}{2j\pi\tau\nu+1}$
Passe-haut	1	$H(p) = \frac{\tau p}{\tau p+1}$	$H(\nu) = \frac{2j\pi\tau\nu}{2j\pi\tau\nu+1}$
Passe-bas	2	$H(p) = \frac{1}{\tau^2p^2+2m\tau p+1}$	$H(\nu) = \frac{1}{4jm\pi\tau\nu+(1-4\pi^2\tau^2\nu^2)}$
Passe-bande	2	$H(p) = \frac{2m\tau p}{\tau^2p^2+2m\tau p+1}$	$H(\nu) = \frac{4jm\pi\tau\nu}{4jm\pi\tau\nu+(1-4\pi^2\tau^2\nu^2)}$
Passe-haut	2	$H(p) = \frac{\tau^2p^2}{\tau^2p^2+2m\tau p+1}$	$H(\nu) = \frac{-4\pi^2\tau^2\nu^2}{4jm\pi\tau\nu+(1-4\pi^2\tau^2\nu^2)}$

Cahier des Charges → Implémentation

- Techniques de synthèse de Filtre (gabarit d'ordre $n \rightarrow$ cellules d'ordre 1 et 2).
  - Butterworth, Chebychev, Cauer, Bessel.
- Cellules d'ordre 1 et 2 :
  - Circuits Passifs ou Actifs (Sallen-Key, Rauch).

Problématique

Soit $S(\nu)$ la TF d'un signal appliqué à l'entrée d'un filtre dont la réponse en fréquence est notée $H(\nu)$. Quel sera l'expression de la sortie du filtre ?

$$e(t) \longrightarrow \boxed{H(\nu)} \longrightarrow s(t)$$

Filtrage de Signaux Analogiques

ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE BREST

Problématique

Soit $S(\nu)$ la TF d'un signal appliqué à l'entrée d'un filtre dont la réponse en fréquence est notée $H(\nu)$. Quel sera l'expression de la sortie du filtre ?

$$e(t) \longrightarrow \boxed{H(\nu)} \longrightarrow s(t)$$

Réponse à une sinusoïde ($e(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$)

- Dans le domaine fréquentiel, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S(\nu) = H(\nu)E(\nu) &= |H(\nu)|e^{j\arg[H(\nu)]} \times \left(\frac{a}{2}e^{j\varphi}\delta(\nu - f_0) + \frac{a}{2}e^{-j\varphi}\delta(\nu + f_0)\right) \\ &= \frac{a}{2}|H(f_0)|e^{j(\varphi+\arg[H(f_0)])}\delta(\nu - f_0) + \frac{a}{2}|H(f_0)|e^{-j(\varphi+\arg[H(f_0)])}\delta(\nu + f_0) \end{aligned}$$

- Dans le domaine temporel, nous trouvons :

$$s(t) = a|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \varphi + \arg[H(f_0)])$$

Réponse à une sinusoïde

$$s(t) = a|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \varphi + \arg[H(f_0)])$$

La réponse du filtre est donc une sinusoïde avec les caractéristiques suivantes :

- Même fréquence f_0 que la sinusoide en entrée,
- Amplitude multipliée par $|H(f_0)|$,
- Déphasage de $\arg[H(f_0)]$ (noté $-\phi(f_0)$ dans le poly).

Exemple

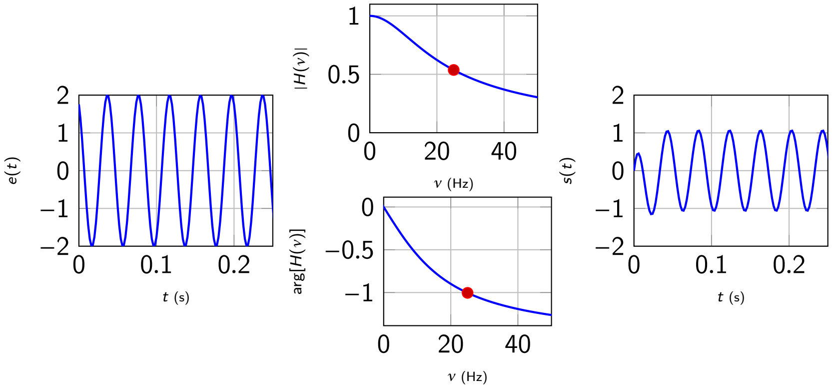


Figure 4: Sinusoide à $f_0 = 25$ Hz.

Retard de Phase : Définition

Au lieu d'utiliser la notion de déphasage (en rad), nous préférons utiliser explicitement la notion de décalage temporel (en s).

$$\begin{aligned} s(t) &= a|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \varphi + \arg[H(f_0)]) \\ &= a|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 (t - \tau_\varphi) + \varphi) \end{aligned}$$

- Retard de phase :

$$\tau_\varphi \triangleq -\frac{\arg[H(f_0)]}{2\pi f_0}$$

Retard de Phase

- Cas de N sinusoïdes : Considérons N sinusoïdes d'amplitude et de phase respectives a_n et φ_n :

$$e(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

En sortie de filtre, nous obtenons :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n |H(f_n)| \cos(2\pi f_n (t - \tau_{\varphi_n}) + \varphi_n)$$

Retard de Phase

- Cas de N sinusoïdes : Considérons N sinusoïdes d'amplitude et de phase respectives a_n et φ_n :

$$e(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

En sortie de filtre, nous obtenons :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n |H(f_n)| \cos(2\pi f_n (t - \tau_{\varphi_n}) + \varphi_n)$$

- Retard de phase uniforme: Pour éviter des déformations du signal dans la bande passante, nous allons imposer un retard de phase uniforme c-a-d $\tau_{\varphi_1} = \cdots = \tau_{\varphi_N} = \alpha$. Il en vient que :

$$\arg[H(\nu)] = -2\pi\alpha\nu$$

  - Retard de phase uniforme → phase linéaire.
  - Phase non-linéaire → distorsion de phase.

Retard de Groupe (Group delay) : Définition

Le retard de groupe permet de quantifier la linéarité de de la phase

$$\tau_g(\nu) \triangleq -\frac{1}{2\pi}\frac{d\arg[H(\nu)]}{d\nu}$$

- Phase linéaire → retard de groupe constant.

Filtre sans distorsion

- Définition : Un filtre sans distorsion dans une bande passante Ω respecte les deux conditions suivantes pour tout $\nu \in \Omega$.

$$|H(\nu)| = H_0$$
$$\tau_g(\nu) = \alpha$$

  - pas de distorsion d'amplitude,
  - pas de distorsion de phase.
- Implication: Pour un filtre sans distorsion d'amplitude et de phase, le signal s'exprime **dans la bande passante** sous la forme :

$$s(t) = H_0 e(t - \alpha)$$